

2^{nde} — Fonctions de référence

Feuille d'exercices

Exercice 1. On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = x^2.$$

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x$						
$g(x) = x^2$						

2. Sur un même repère orthonormé, tracer les courbes représentatives de f et g .
3. À l'aide du graphique :
 - a) comparer $f(2)$ et $g(2)$ puis $f(-2)$ et $g(-2)$;
 - b) résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
4. En déduire algébriquement les solutions de l'équation $x = x^2$.

Exercice 2. On considère la fonction valeur absolue $a(x) = |x|$.

1. Donner l'expression de $a(x)$ suivant le signe de x , c'est-à-dire compléter :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } \dots \\ -x & \text{si } \dots \end{cases}$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} chacune des équations suivantes :
 - a) $|x| = 3$;
 - b) $|x| = 2x$;
 - c) $|x - 1| = 4$.
3. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $|x - 2| \leqslant 5$.
4. Représenter sur un axe gradué l'ensemble des solutions.

Exercice 3. On considère les fonctions de référence suivantes :

$$i(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad r(x) = \sqrt{x} \quad (x \geqslant 0).$$

1. Préciser les ensembles de définition :
 - a) D_i , ensemble de définition de i ;
 - b) D_r , ensemble de définition de r .
2. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :
 - a) $\frac{1}{x} = 2$;
 - b) $\sqrt{x} = 3$;
 - c) $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$ (indiquer clairement pourquoi certaines valeurs sont interdites).
3. Étudier le signe de $\frac{1}{x}$ sur les intervalles $(-\infty; 0)$ et $(0; +\infty)$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation

$$\frac{1}{x} > 0.$$

Exercice 4. On considère la fonction carré $g(x) = x^2$ et la fonction cube $h(x) = x^3$.

1. Étudier le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} . Que peut-on dire de l'image d'un nombre réel par la fonction carré?
2. Étudier le signe de $h(x)$ sur \mathbb{R} .
3. Comparer, pour $x \geq 1$, les valeurs de $g(x)$ et $h(x)$:

pour $x \geq 1$, lequel est le plus grand entre x^2 et x^3 ?

Justifier.

4. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation

$$x^3 \geq x^2.$$

Exercice 5. On définit les fonctions suivantes à partir des fonctions de référence :

$$f(x) = x^2 - 3, \quad g(x) = 2x^2, \quad h(x) = |x - 1|.$$

1. Expliquer comment on obtient la courbe de f à partir de la parabole de la fonction carré $x \mapsto x^2$.
2. Même question avec la courbe de g à partir de la parabole $x \mapsto x^2$.
3. Décrire la transformation géométrique qui permet d'obtenir la courbe de h à partir de la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$.
4. Pour chaque fonction précédente, donner la valeur minimale prise et l'abscisse à laquelle cette valeur est atteinte (sans dérivée).

Exercice 6. On considère la fonction $s(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$ et la fonction $c(x) = x^2$ définie sur \mathbb{R} .

1. Résoudre l'équation $s(x) = 2$. Interpréter graphiquement la solution.
2. Résoudre l'équation $c(x) = 9$. Combien de solutions admet-elle? Pourquoi?
3. Sur le même repère, on trace les courbes de $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$ (sur les intervalles adaptés). Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation

$$\sqrt{x} = x^2.$$

4. Vérifier que $x = 0$ et $x = 1$ sont solutions, puis expliquer pourquoi il n'y en a pas d'autre.