2^{nde} — Fonctions de référence

Cours

1. Les principales fonctions de référence

Dans tout ce chapitre, x désigne un nombre réel.

— **Fonction identité** : $f(x) = x$.
Domaine : $\mathbb{R}$.
La courbe est la droite passant par l'origine, de pente 1.

— **Fonction carré** : $g(x) = x^2$.
Domaine : $\mathbb{R}$.
La courbe est une parabole à sommet en $(0;0)$, ouverte vers le haut.

— **Fonction cube** : $h(x) = x^3$.
Domaine : $\mathbb{R}$.
La courbe est une courbe en forme de "S", croissante sur tout $\mathbb{R}$.

— **Fonction inverse** : $i(x) = \dfrac{1}{x}$.
Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
La courbe est composée de deux branches dans les quadrants I et III.

— **Fonction racine carrée** : $r(x) = \sqrt{x}$.
Domaine : $[0;+\infty[$.
La courbe est définie uniquement pour $x \geqslant 0$, croissante et toujours au-dessus de l'axe des abscisses.

— **Fonction valeur absolue** : $a(x) = |x|$.
Domaine : $\mathbb{R}$.
La courbe est une "V" centrée à l'origine.

2. Domaines de définition

2.1. Racine carrée

La fonction $\sqrt{x}$ n'a de sens que pour $x \geqslant 0$.

$$r(x) = \sqrt{x} \quad \text{est définie pour } x \in [0;+\infty[.$$

Exemples :

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{9} = 3,$$

mais $\sqrt{-1}$ n'est pas définie dans $\mathbb{R}$.

2.2. Inverse

La fonction $i(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas définie pour $x = 0$ car on ne peut pas diviser par zéro.

$$D_i = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

3. Étude rapide de quelques variations

3.1. Identité et cube

— La fonction identité $f(x) = x$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

— La fonction cube $h(x) = x^3$ est aussi **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

3.2. Carré

La fonction carré $g(x) = x^2$ n'est pas monotone sur tout $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x) = x^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Elle est décroissante sur $(-\infty; 0]$ puis croissante sur $[0; +\infty)$.

4. Valeur absolue

Par définition,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

— $|x|$ représente la distance entre le point d'abscisse x et l'origine sur la droite réelle.

— $|x| \geqslant 0$ pour tout réel x.

Exemples.

$$|3| = 3, \quad |-5| = 5, \quad |0| = 0.$$

5. Résolution d'équations et d'inéquations simples

5.1. Avec la valeur absolue

— $|x| = a$ avec $a > 0 \iff x = a$ ou $x = -a$.

— $|x| \leqslant a$ avec $a > 0 \iff -a \leqslant x \leqslant a$.

5.2. Avec la racine carrée

Pour $\sqrt{x} = b$ avec $b \geqslant 0$, on a

$$\sqrt{x} = b \iff x = b^2 \quad \text{avec } x \geqslant 0.$$

5.3. Avec l'inverse

Pour $\frac{1}{x} = k$ avec $k \neq 0$,

$$\frac{1}{x} = k \iff x = \frac{1}{k}, \quad x \neq 0.$$

6. Transformations de courbes

On peut obtenir de nombreuses fonctions à partir des fonctions de référence en effectuant des transformations simples :

— **Translation verticale** : $x \mapsto x^2 + 3$ est la parabole de x^2 déplacée de 3 unités vers le haut.

— **Translation horizontale** : $x \mapsto (x-2)^2$ est la parabole de x^2 déplacée de 2 unités vers la droite.

— **Homothétie verticale** : $x \mapsto 2x^2$ est une parabole plus "étroite" que x^2.

— **Décalage de la valeur absolue** : $x \mapsto |x-1|$ est la courbe de $|x|$ déplacée d'une unité vers la droite.

Ces fonctions de référence servent de base pour comprendre les fonctions plus complexes rencontrées ensuite (fonctions affines, polynômes, fonctions rationnelles, etc.).