2^{nde} — Équations de droites et systèmes

Cours

1 Équation d'une droite

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, une droite peut être décrite par une équation reliant les coordonnées (x,y) d'un point variable $M(x;y)$.

Forme générale et forme réduite

— **Forme générale :** une droite peut être décrite par une équation

$$ax+by+c=0$$

où $(a,b)\neq(0,0)$.

— **Forme réduite :** lorsque $b\neq 0$, on peut isoler y et écrire

$$y=mx+p$$

où m est le *coefficient directeur* (la pente de la droite) et p est l'*ordonnée à l'origine*.

À partir de $ax+by+c=0$ avec $b\neq 0$:

$$by=-ax-c \quad\Longrightarrow\quad y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}.$$

On retrouve la forme $y=mx+p$ avec

$$m=-\frac{a}{b}, \qquad p=-\frac{c}{b}.$$

Exemple. Pour $3x-2y+4=0$:

$$-2y=-3x-4\Longrightarrow y=\frac{3}{2}x+2.$$

La droite a pour coefficient directeur $m=\dfrac{3}{2}$ et coupe l'axe des ordonnées au point $(0;2)$.

Condition d'appartenance

Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=mx+p$ et un point $A(x_A;y_A)$ du plan.

Propriété. Le point A appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation, c'est-à-dire

$$y_A=mx_A+p.$$

Exemple. Pour $\mathcal{D}: y=-x+4$ et $A(1;3)$, on calcule $-1+4=3$. Comme $3=y_A$, le point A est sur $\mathcal{D}$.

2 Droite de coefficient directeur donné passant par un point

On cherche l'équation d'une droite de coefficient directeur m passant par un point $A(x_A;y_A)$.
On part de $y=mx+p$ et on impose que A appartienne à la droite :

$$y_A=mx_A+p \quad\Longrightarrow\quad p=y_A-mx_A.$$

Ainsi une équation possible est

$$y=mx+(y_A-mx_A).$$

Exemple. On veut la droite de coefficient directeur $m=3$ passant par $A(-1;2)$. On a

$$p=2-3\times(-1)=2+3=5,$$

donc une équation possible est $y=3x+5$.

Cas particulier : droites horizontales et verticales

- **Droite horizontale :** $y = k$ (coefficient directeur $m = 0$).
- **Droite verticale :** $x = a$ (pas de forme du type $y = mx + p$).

3 Droite passant par deux points

Soient deux points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$.

1. On calcule le coefficient directeur :
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$
2. On utilise la condition d'appartenance avec l'un des points, par exemple A, pour déterminer p :
$$y_A = mx_A + p \quad \Longrightarrow \quad p = y_A - mx_A.$$
3. On obtient l'équation réduite $y = mx + p$.

Exemple. Pour $A(1;4)$ et $B(3;0)$:
$$m = \frac{0-4}{3-1} = -2.$$
Avec $A(1;4)$:
$$4 = -2 \times 1 + p \Longrightarrow p = 6.$$
L'équation de la droite (AB) est donc $y = -2x + 6$.

4 Parallélisme, intersection et systèmes

Parallélisme

Considérons deux droites d'équations réduites
$$y = m_1 x + p_1, \qquad y = m_2 x + p_2.$$

- Elles sont **parallèles** si $m_1 = m_2$ et $p_1 \neq p_2$.
- Elles sont **confondues** si $m_1 = m_2$ et $p_1 = p_2$.

Systèmes linéaires et intersection

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues
$$(S) \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$
représente deux droites dans le plan.

Cas possibles :

- une **solution unique** : les deux droites sont sécantes ;
- **aucune solution** : les deux droites sont parallèles distinctes ;
- une **infinité de solutions** : les deux droites sont confondues.

Résoudre le système (S) revient à trouver le point d'intersection des deux droites.

Méthodes de résolution

- **Substitution :** on isole une inconnue (par exemple y) dans la première équation, puis on remplace dans la seconde.
- **Combinaison linéaire :** on additionne ou soustrait des multiples des deux équations pour éliminer une inconnue.

Exemple (combinaison).

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 4x-3y=5 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations :

$$6x=12 \Longrightarrow x=2.$$

On remplace alors dans la première équation :

$$2\times 2+3y=7 \Longrightarrow 4+3y=7 \Longrightarrow y=1.$$

Le système admet une solution unique $(2;1)$.

5 Modéliser par une droite et un système

Exemple. Deux plateformes proposent un abonnement vidéo.

— Offre A : frais fixes de 12 euros par mois et 2 euros par film loué.

— Offre B : frais fixes de 6 euros par mois et 3 euros par film loué.

On note x le nombre de films loués dans le mois, et $C_A(x)$ et $C_B(x)$ les coûts correspondants.

$$C_A(x)=12+2x, \qquad C_B(x)=6+3x.$$

Pour connaître le nombre de films à partir duquel les deux offres coûtent la même chose, on résout

$$C_A(x)=C_B(x) \Longleftrightarrow 12+2x=6+3x \Longleftrightarrow x=6.$$

On peut aussi voir cela comme le système

$$\begin{cases} y=12+2x \\ y=6+3x \end{cases}$$

et chercher le point d'intersection des deux droites.