

Ensembles de nombres et valeur absolue

Seconde – Fiche d'exercices

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

• droite réelle • intervalles • union/intersection • valeur absolue • distance • encadrements

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

I – Ensembles de nombres

Exercice 1 – Simplifier puis classer

Simplifier chaque nombre puis donner le plus petit ensemble auquel il appartient parmi

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

1. $A = \frac{18}{6}$

4. $D = \frac{7}{12}$

6. $F = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

2. $B = -\sqrt{81}$

5. $E = \sqrt{50} - 3\sqrt{2}$

7. $G = (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})$

3. $C = \frac{17}{8}$

8. $H = \sqrt{27} - \sqrt{12}$

Exercice 2 – Rationnel ou irrationnel ?

Déterminer si chaque nombre est rationnel ou irrationnel. Simplifier avant de conclure.

1. $A = \sqrt{8} - 2\sqrt{2}$

3. $C = (\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$

5. $E = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 5$

2. $B = \sqrt{12} + \sqrt{27}$

4. $D = \frac{\sqrt{18} + \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

6. $F = \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$

Exercice 3 – Construire des exemples

Donner un exemple de nombre x vérifiant chaque condition.

1. $x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

2. $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

3. $x \in \mathbb{Q}$ et $2 < x < 2,1$.

4. $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $3 < x < 4$.

5. $x \notin \mathbb{Q}$ mais $x^2 \in \mathbb{N}$.

6. Trouver un irrationnel x tel que $x + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

7. Trouver deux nombres irrationnels dont la somme est rationnelle.

8. Trouver deux nombres irrationnels non nuls dont le produit est rationnel.

Exercice 4 – Vrai ou faux ?

Justifier chaque réponse par une propriété, une démonstration ou un contre-exemple.

1. Tout entier relatif est rationnel.

2. Tout nombre rationnel est entier.

3. Si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $x + 4 \notin \mathbb{Q}$.

4. Le produit de deux nombres irrationnels est toujours irrationnel.

5. Si $x^2 \in \mathbb{Q}$, alors $x \in \mathbb{Q}$.

6. Si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \notin \mathbb{Q}$, alors $x + y \notin \mathbb{Q}$.

7. Entre deux nombres rationnels distincts, il existe un nombre irrationnel.

8. Entre deux nombres réels distincts, il existe un nombre rationnel.

II – Droite réelle, intervalles, union et intersection

Exercice 5 – Compléter les écritures d'un intervalle

Compléter le tableau. Pour chaque ligne, donner la notation d'intervalle, les inégalités correspondantes, une représentation sur une droite graduée et une phrase descriptive.

Notation d'intervalle	Inégalité(s) correspondante(s)	Représentation sur une droite graduée	Phrase
$[-3; 5]$			
	$x < 3$		
			Intervalle de 4 à 6, fermé en 4 et ouvert en 6.
$[2; +\infty[$			
	$-3 < x \leq -1$		
			Intervalle de $-\infty$ à 5, fermé en 5.
			Intervalle de -2 à 5, ouvert.

Exercice 6 – Union et intersection d'intervalles

Compléter le tableau. Pour chaque ligne, calculer $I \cup J$ et $I \cap J$, puis représenter les ensembles obtenus sur une droite réelle.

Intervalle I	Intervalle J	$I \cup J$	$I \cap J$	Représentation
$[-10; 2[$	$[-5; 3]$			
$] - \infty; 2[$	$[0; 5[$			
$[3; +\infty[$	$] - \infty; 6[$			
$] - \infty; -2[$	$] - 4; -3[$			
$] - 4; 2]$	$[2; 5]$			
$] - 4; 2]$	$[2; 5]$			

Exercice 7 – Inéquations et systèmes d'inéquations

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et donner les solutions sous forme d'intervalles.

a) $5x + 3 < 2x - 6$

b) $\frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \leq 4x + \frac{13}{4}$

c) $-3 < 2x - 1 \leq 5$

d) $3 \leq -4x + 2 < 5$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants et donner les solutions sous forme d'intervalles.

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\begin{cases} x < 7 \\ x > 0 \end{cases}$ | c) $\begin{cases} -2 \leq x < 5 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ | e) $\begin{cases} -3x + 1 < -5 + x \\ 4x - 2 < 2x + 3 \end{cases}$ |
| b) $\begin{cases} x > -3 \\ x > 2 \end{cases}$ | d) $\begin{cases} -3 < x < 6 \\ -7 \leq x \leq 3 \end{cases}$ | |

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les conditions suivantes avec « **ou** » et donner les solutions sous forme d'intervalles.

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\begin{cases} x > 2 \\ \text{ou} \\ x \leq 5 \end{cases}$ | c) $\begin{cases} 2 < x < 5 \\ \text{ou} \\ x \leq 4 \end{cases}$ | e) $\begin{cases} -3x + 1 < -5 + x \\ \text{ou} \\ 4x - 2 \leq 2x + 3 \end{cases}$ |
| b) $\begin{cases} x \leq -3 \\ \text{ou} \\ x > 2 \end{cases}$ | d) $\begin{cases} -3 < x < 0 \\ \text{ou} \\ -7 \leq x \leq 10 \end{cases}$ | |

Exercice 8 – Opérations avancées sur les intervalles

On considère $A =]-\infty; 2]$, $B = [-3; 6[$, $C =]1; 8]$.

Déterminer :

- | | |
|------------------------|--------------------------------------|
| 1. $A \cap B$ | 5. $B \cap (A \cup C)$ |
| 2. $B \cap C$ | 6. $\mathbb{R} \setminus B$ |
| 3. $A \cup C$ | 7. $(A \cup B) \cap C$ |
| 4. $(A \cap B) \cup C$ | 8. $(B \setminus A) \cup (A \cap C)$ |

Exercice 9 – Intervalle dépendant d'un paramètre

On considère $I_m = [m - 2; m + 3]$.

Déterminer les valeurs réelles de m telles que :

- | | |
|----------------------------|--|
| 1. $0 \in I_m$. | 4. $[1; 4] \subset I_m$. |
| 2. $5 \in I_m$. | 5. $I_m \cap [0; 2] \neq \emptyset$. |
| 3. $I_m \subset [-4; 8]$. | 6. $I_m \cap]-\infty; 1[= \emptyset$. |

III – Valeur absolue et distance

Exercice 10 – Intervalle centré et valeur absolue

Écrire chaque intervalle sous la forme $|x - a| \leq r$ ou $|x - a| < r$.

- | | | |
|--------------------|---|--|
| 1. $x \in [-4; 6]$ | 4. $x \in]-8; 2[$ | 6. $x \in \left] -\frac{5}{4}; \frac{11}{4} \right[$ |
| 2. $x \in]-3; 7[$ | 5. $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{9}{2} \right]$ | |
| 3. $x \in [2; 10]$ | | |

Exercice 11 – Valeur absolue vers intervalle

Donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

- | | | |
|---------------------|----------------------|----------------------|
| 1. $ x - 3 \leq 5$ | 3. $ x - 7 \leq 2$ | 5. $ 3x + 6 < 9$ |
| 2. $ x + 2 < 4$ | 4. $ 2x - 4 \leq 6$ | 6. $ 5 - 2x \leq 3$ |

Exercice 12 – Extérieur d'un intervalle

Résoudre puis donner la réponse comme réunion d'intervalles.

- | | | |
|---------------------|----------------------|--|
| 1. $ x - 2 \geq 4$ | 3. $ 2x - 6 \geq 8$ | 5. $\left x - \frac{1}{2} \right \geq \frac{3}{2}$ |
| 2. $ x + 3 > 5$ | 4. $ 3x + 3 > 6$ | |
| | | 6. $ 4 - 2x > 10$ |

Exercice 13 – Supprimer une valeur absolue

Simplifier exactement, sans utiliser d'approximation décimale.

- | | | |
|--|--|--------------------------|
| 1. $A = 3 - \sqrt{10} $ | 3. $C = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 $ | 5. $E = \sqrt{7} - 3 $ |
| 2. $B = 2 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - 4 $ | 4. $D = 5\sqrt{2} - 7 $ | 6. $F = 3 - 2\sqrt{2} $ |

Exercice 14 – Équations avec valeur absolue

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- | | | |
|-------------------|-------------------------|------------------------|
| 1. $ x - 4 = 3$ | 3. $ 3x - 2 = 7$ | 5. $ x + 2 = x - 6 $ |
| 2. $ 2x + 1 = 5$ | 4. $ 2x - 3 = x + 4 $ | 6. $ 3x + 1 = 2x + 5$ |

Exercice 15 – Inéquations avec valeur absolue

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

- | | | |
|---------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. $ x - 3 \leq 4$ | 3. $ 2x - 1 \leq 7$ | 5. $ 3x + 6 > 9$ |
| 2. $ x + 5 < 2$ | 4. $ x - 2 \geq 5$ | 6. $ 2x + 1 \geq x - 5 $ |

Exercice 16 – Deux contraintes de distance

Résoudre simultanément : $|x - 4| \leq 5$ et $|x - 7| \leq 3$.

- | | |
|--|---|
| 1. Traduire chaque contrainte sous forme d'intervalle. | 4. Donner son rayon. |
| 2. Calculer l'intersection des deux intervalles. | 5. Réécrire la réponse sous la forme $ x - a \leq r$. |
| 3. Donner le centre de l'intervalle obtenu. | 6. Donner l'amplitude de l'intervalle final. |
-

IV – Distance sur la droite réelle

Exercice 17 – Distance entre des points

On considère les points de la droite réelle $A(-3)$, $B(5)$, $C(\sqrt{5})$.

- | | |
|--|---|
| 1. Calculer la distance AB . | 4. Comparer AC et BC sans calculatrice. |
| 2. Écrire AC sous la forme d'une valeur absolue. | 5. Déterminer l'abscisse du milieu de $[AB]$. |
| 3. Simplifier AC . | 6. Déterminer les points situés à distance 4 du point A . |

Exercice 18 – Équidistance

Résoudre en utilisant une interprétation géométrique sur la droite réelle.

- | | |
|--|---|
| 1. $ x + 2 = x - 6 $ | 3. $\left x + \frac{7}{3}\right = \left x - \frac{5}{2}\right $ |
| 2. $\left x - \frac{1}{4}\right = \left x + \frac{3}{2}\right $ | 4. Déterminer les réels plus proches de $\frac{5}{2}$ que de $-\frac{7}{3}$. |
| | 5. Déterminer les réels x tels que $ x - 1 \leq x + 5 $. |

Exercice 19 – Distance maximale

- Déterminer le plus petit réel M tel que $|x| \leq M$ pour tout $x \in [-7; 4]$.
- Déterminer le plus petit réel M tel que $|x - 2| \leq M$ pour tout $x \in [-3; 8]$.
- Déterminer le plus petit réel M tel que $|x + 4| \leq M$ pour tout $x \in [-6; 5]$.
- Déterminer le plus petit réel M tel que $|2x - 1| \leq M$ pour tout $x \in [-2; 4]$.

Exercice 20 – Tolérances simultanées

Une mesure x doit vérifier simultanément $|x - 10| \leq 2$ et $|x - 11| \leq 1,5$.

1. Donner les deux intervalles associés.
2. Déterminer l'intervalle des valeurs admissibles.
3. Calculer son amplitude.
4. Déterminer son centre et son rayon.
5. Réécrire l'intervalle final sous la forme $|x - a| \leq r$.

V – Encadrements

Exercice 21 – Encadrer une racine carrée

Sans calculatrice, donner d'abord un encadrement entre deux entiers consécutifs, puis un encadrement d'amplitude 0,1.

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| 1. $\sqrt{7}$ | 3. $\sqrt{19}$ | 5. $\sqrt{52}$ |
| 2. $\sqrt{11}$ | 4. $\sqrt{37}$ | 6. $\sqrt{85}$ |

Exercice 22 – Encadrement au centième

Déterminer deux centièmes consécutifs a et b tels que $a < \sqrt{n} < b$. Justifier en comparant les carrés.

- | | | |
|------------|-------------|-------------|
| 1. $n = 2$ | 3. $n = 13$ | 5. $n = 41$ |
| 2. $n = 5$ | 4. $n = 29$ | 6. $n = 73$ |

Exercice 23 – Encadrements et opérations

On sait que $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ et $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.

En déduire un encadrement de :

- | | | |
|-------------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 1. $A = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ | 3. $C = 5 - \sqrt{3}$ | 5. $E = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$ |
| 2. $B = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ | 4. $D = 3\sqrt{2} - 2$ | 6. $F = 7 - 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$ |

Exercice 24 – Entiers dans des intervalles à bornes irrationnelles

Déterminer tous les entiers appartenant aux intervalles suivants.

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $I =]-\sqrt{20}; \sqrt{30}[$ | 3. $K =]\sqrt{7}; \sqrt{65}[$ |
| 2. $J = [-\sqrt{50}; \sqrt{17}[$ | 4. $L =]-\sqrt{45}; -\sqrt{5}[$ |

VI – Synthèses avancées

Exercice 25 – Ensembles, intervalle et valeur absolue

On considère $A = [-6; 4]$ et $B =]-2; 8[$.

1. Calculer $A \cap B$.
2. Écrire $A \cap B$ sous forme d'inégalités.
3. Déterminer le centre et le rayon de $A \cap B$.
4. Écrire $A \cap B$ à l'aide d'une valeur absolue.
5. Déterminer $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$.
6. Écrire ce complémentaire sous forme d'une réunion d'intervalles.

Exercice 26 – Intervalle mobile et inclusion

On pose $I_m = [m - 1; m + 1]$ et $J = [-2; 8]$.

1. Déterminer les m tels que $I_m \subset J$.
2. Déterminer les m tels que $0 \in I_m$.
3. Déterminer les m tels que $I_m \cap [3; 6] \neq \emptyset$.
4. Déterminer les m tels que $I_m \cap]-\infty; 0[= \emptyset$.
5. Écrire I_m sous la forme $|x - m| \leq 1$.

Exercice 27 – Problème de tolérance

Une pièce doit avoir une longueur de 25 mm avec une tolérance de 0,15 mm.

1. Traduire cette condition par une valeur absolue.
2. Donner l'intervalle des longueurs acceptables.

Une deuxième contrainte impose $|x - 25,1| \leq 0,08$.

3. Donner l'intervalle correspondant.
4. Déterminer les valeurs satisfaisant simultanément les deux contraintes.
5. Calculer l'amplitude de l'intervalle final.
6. Déterminer son centre et son rayon.
7. Écrire l'intervalle final à l'aide d'une valeur absolue.

Exercice 28 – Grand défi de synthèse

On pose $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \leq 5\}$ et $B =]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$.

1. Écrire A sous forme d'intervalle.
2. Calculer $A \cap B$.
3. Déterminer $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$.
4. Déterminer tous les entiers appartenant à $A \cap B$.
5. Déterminer les réels m tels que $[m - 1; m + 1] \subset A$.
6. Déterminer le plus petit réel M tel que $|x| \leq M$ pour tout $x \in A$.
7. Déterminer les réels $x \in A$ tels que $|x - 4| \geq 3$.
8. Écrire l'ensemble obtenu à la question précédente sous forme d'une réunion d'intervalles.

VII – Compléments ciblés Seconde

Exercice 29 – Nombres décimaux, rationnels et irrationalité

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux. Répondre en justifiant soigneusement.

1. Montrer que $\frac{7}{40} \in \mathbb{D}$.
2. Montrer que $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$.
3. Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, en partant de $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux.
4. Donner un nombre irrationnel strictement compris entre 2 et 3, puis justifier.

Exercice 30 – Défi final : intervalle mobile, séparation et tangence

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $I_m = [m - 2; m + 2]$ et $J = [-1; 5]$.

1. Déterminer les valeurs de m telles que $I_m \subset J$.
2. Existe-t-il des valeurs de m telles que $J \subset I_m$? Justifier.
3. Déterminer les valeurs de m telles que $0 \in I_m$ et $4 \in I_m$ simultanément.
4. Déterminer les valeurs de m telles que $I_m \cap J = \emptyset$.
5. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $I_m \cap J$ contient exactement un point.
6. Écrire enfin I_m à l'aide d'une valeur absolue.

Rappels essentiels

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$:

$$|x - a| \leq r \iff x \in [a - r; a + r]$$

$$|x - a| < r \iff x \in]a - r; a + r[$$

$$|x - a| \geq r \iff x \in]-\infty; a - r] \cup [a + r; +\infty[$$

La distance entre deux réels x et a est

$$d(x, a) = |x - a|.$$

Enfin,

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad |x| = -x \text{ si } x < 0.$$