2^{nde} – Calculs numériques
Fractions, puissances, racines

1 Fractions et simplifications avancées

Un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'une fraction

$$\frac{a}{b}$$

avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. En Seconde, on doit être capable de **simplifier** rapidement des fractions, y compris dans des calculs plus longs.

Pour simplifier une fraction, on divise le numérateur et le dénominateur par leur **plus grand diviseur commun** (PGCD).

Exemple :

$$\frac{84}{126}.$$

On a $\mathrm{PGCD}(84, 126) = 42$. Donc

$$\frac{84}{126} = \frac{84 \div 42}{126 \div 42} = \frac{2}{3}.$$

Attention également au **signe** de la fraction :

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

En général, on place le signe « $-$ » devant la fraction.

2 Calculs avec plusieurs fractions

2.1 Somme et différence

Pour additionner ou soustraire plusieurs fractions, on se ramène à un **même dénominateur** (souvent le plus petit possible). Ensuite, on additionne ou soustrait les numérateurs.

Exemple :

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} = \frac{9}{12} - \frac{10}{12} + \frac{7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

2.2 Produit et quotient

Pour le **produit** de deux fractions :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

On simplifie souvent *avant* de multiplier pour rendre les nombres plus petits.

Pour le **quotient** :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Exemple :

$$\frac{5}{6} \div \frac{2}{9} = \frac{5}{6} \times \frac{9}{2} = \frac{5 \times 9}{6 \times 2} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}.$$

Dans un calcul plus long, on respecte toujours l'**ordre des opérations** (parenthèses, puissances, produits/quotients, puis sommes/différences).

3 Puissances entières

Pour un réel a et un entier relatif n, on définit la puissance a^n :

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$ si $n \geq 1$;
- $a^0 = 1$ (si $a \neq 0$) ;
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ pour $n \geq 1$.

3.1 Règles de calcul sur les puissances

Pour tout réel a non nul et pour tous entiers relatifs m et n :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$;
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (si $a \neq 0$) ;
- $(a^m)^n = a^{mn}$.

Exemples :

$$3^4 \times 3^{-2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9, \qquad \frac{10^4}{10^{-2}} = 10^{4-(-2)} = 10^6.$$

4 Puissances de 10 et écriture scientifique

Les puissances de 10 permettent d'écrire des nombres très grands ou très petits.

- $10^3 = 1000$, $10^6 = 1\,000\,000$, etc. ;
- $10^{-1} = \dfrac{1}{10}$, $10^{-2} = \dfrac{1}{100}$, etc.

L'**écriture scientifique** d'un nombre non nul est de la forme

$$x = a \times 10^n$$

avec $1 \leq a < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exemples :

$$0{,}00036 = 3{,}6 \times 10^{-4}, \qquad 7\,200\,000 = 7{,}2 \times 10^6.$$

Lorsqu'on multiplie ou divise des nombres en écriture scientifique, on :

- multiplie (ou divise) les coefficients a ;
- ajoute (ou soustrait) les exposants des puissances de 10 ;
- réajuste éventuellement le coefficient pour qu'il soit compris entre 1 et 10.

5 Racines carrées et simplifications

Pour un réel $a \geq 0$, la **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré vaut a :

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

On utilise souvent les propriétés suivantes (pour $a, b \geq 0$, $b > 0$) :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$;
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemples :

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}, \qquad \sqrt{\frac{49}{121}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{121}} = \frac{7}{11}.$$

On sait également simplifier des expressions avec racines :

$$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3.$$

6 Stratégies de calcul et ordre de grandeur

En Seconde, il est important d'anticiper le résultat d'un calcul et de vérifier sa cohérence par un **ordre de grandeur**.

— Avant le calcul : repérer les simplifications possibles (fractions, puissances, racines carrées...).

— Pendant le calcul : respecter l'ordre des opérations, bien gérer les signes et les parenthèses.

— Après le calcul : vérifier que le résultat final est raisonnable, éventuellement à l'aide d'une écriture scientifique.

Exemple :

$$A = \frac{3}{2} \times 10^{-2} + \frac{1}{4} \times 10^{-1}.$$

On obtient un nombre proche de 0,1. Si la calculatrice affiche 100, c'est qu'il y a une erreur de saisie.