

Calcul numérique et arithmétique — 2nde

Exercice 1 — Fractions imbriquées — hiérarchie des opérations

Niveau : Difficile

1. Calculer exactement : $\frac{\frac{25}{16} \times \frac{24}{15} + 1}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$.
2. Calculer exactement : $\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{7}{6}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{2}}$.
3. Pour le premier calcul, isoler explicitement le numérateur et le dénominateur puis vérifier le quotient final.
4. Expliquer pourquoi une fraction imbriquée doit être calculée de l'intérieur vers l'extérieur et pourquoi la division n'est pas associative.

Exercice 2 — Notation scientifique — différences et quotients de puissances de 10

Niveau : Difficile

1. Écrire en notation scientifique : $21 \times 10^{-4} - 1,1 \times 10^{-3} - 0,0001$.
2. Calculer exactement : $\frac{18 \times 10^{-4} \times (2 \times 10^3)^3}{(3 \times 10^4)^2 \times (10^2)^{-1}}$.
3. Réécrire le résultat de la première question avec le coefficient 0,9, puis sous forme scientifique normalisée.
4. Donner l'ordre de grandeur du résultat de la deuxième question avant le calcul exact.

Exercice 3 — Notation scientifique — simplifications massives

Niveau : Difficile

1. Calculer : $\frac{21 \times 10^4 \times 3 \times 10^5 \times 7 \times 10^8 \times 0,3 \times 10^{-4}}{6,3 \times 10^5 \times 25 \times 10^{-4} \times 21 \times 10^3}$.
2. Calculer exactement : $\frac{(3 \times 10^{-2})^3 (5^2 \times 10^4)^2}{6 \times 10^3 \times 25 \times 10^7}$.
3. Dans chaque expression, identifier les facteurs que l'on peut simplifier avant toute multiplication décimale.
4. Comparer les deux résultats : lequel est le plus grand et d'au moins combien de puissances de 10 ?

Exercice 4 — Puissances numériques — exposants négatifs et signes

Niveau : Difficile

1. Calculer exactement : $(0,1)^5 \times (-0,001)^{-2} \times (0,01)^2$.
2. Simplifier exactement : $\frac{(5^2 \times 3^3)^2 \times 2^{-2} \times (-3)^{-2}}{(3^2 \times 2^4)^3 \times 2^{-3} \times 5}$.
3. Réécrire le résultat de Q34 sans exposant négatif.
4. Justifier le signe du résultat de Q37 avant d'effectuer le calcul.

Exercice 5 — Puissances — décomposition en bases premières

Niveau : Difficile

1. Simplifier : $\frac{12^3 \times 3^{-4} \times (-2)^{-2}}{7^{-1} \times (2^2 \times 7^3)^6}$.
2. Calculer exactement : $\frac{(2^4 \times 3^{-3})^2 \times (-9)^2 \times 25}{(-2)^4 \times (-5)^3}$.
3. Réécrire la réponse de Q41 uniquement avec des exposants positifs.
4. Expliquer sans calcul complet pourquoi la réponse de Q42 doit être négative.

Exercice 6 — Puissances littérales — calcul sur les exposantsNiveau : Difficile

1. Pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$, simplifier : $\frac{a^{-4}b^5(ac^2)^3}{(ba^{-2})^5}$.
2. Pour $a, b, c \neq 0$, simplifier : $\frac{a^8b^6c^4}{a^{10}b^8c^6}$.
3. Préciser toutes les conditions nécessaires sur les lettres pour que les expressions soient définies.
4. Calculer le produit des deux résultats simplifiés de Q39 et Q40.

Exercice 7 — Racines carrées — reconnaître des carrés cachésNiveau : Difficile

1. Soit $X = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$. Déterminer exactement X .
2. Vrai ou faux : $2 + \sqrt{5} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.
3. Montrer que $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$ sont tous deux positifs sans calculatrice.
4. Calculer exactement $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

Exercice 8 — Racines carrées — rationaliser et réduireNiveau : Difficile

1. Simplifier : $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.
2. Simplifier : $\sqrt{\frac{7}{3}} + 3\sqrt{\frac{28}{27}} - 4\sqrt{\frac{7}{12}}$.
3. Simplifier : $\sqrt{192} - \sqrt{75} + \sqrt{27}$.
4. Donner une règle pratique pour transformer plusieurs radicaux en multiples d'un même radical.

Exercice 9 — Nombre d'or — identité et récurrence algébriqueNiveau : Difficile

1. On pose $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Vrai ou faux : $\varphi^2 = \varphi + 1$.
2. On pose $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Exprimer φ^3 sous la forme $a\varphi + b$.
3. On pose $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Simplifier $\frac{1}{\varphi}$.
4. En utilisant uniquement $\varphi^2 = \varphi + 1$, exprimer φ^4 sous la forme $a\varphi + b$.

Exercice 10 — Fractions exactes — produit et quotient croisés

Niveau : Difficile

1. Calculer exactement : $2 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3}$.
2. Calculer exactement : $\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$.
3. Calculer exactement le quotient « résultat de Q48 / résultat de Q47 ».
4. Expliquer pourquoi il vaut mieux simplifier avant de multiplier lorsque des facteurs communs sont visibles.

Exercice 11 — Substitution et identité — attention au domaineNiveau : Difficile

1. Pour $x = -\frac{1}{2}$, calculer $4x^3 - 2x^2 + x + 3$.
2. Pour tout réel $x \neq 1$, on a $\frac{x^3 - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = 1$.
3. Vérifier l'identité de Q50 pour $x = 2$.
4. Pourquoi ne peut-on pas conclure que le quotient de Q50 vaut 1 pour $x = 1$?

Exercice 12 — Ordres de grandeur et unités microscopiquesNiveau : Difficile

1. Une sphère d'argon a un rayon de $0,98 \text{ \AA}$, avec $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$. Combien de sphères entières peut-on aligner au maximum sur 1 mm , en les supposant tangentes ?
2. Un même alignement est réalisé sur $2,5 \text{ cm}$. Combien de sphères d'argon entières de rayon $0,98 \text{ \AA}$ peut-on placer au maximum ?
3. Expliquer pourquoi le calcul doit utiliser le diamètre et non le rayon.
4. Donner un ordre de grandeur du nombre de sphères sur 1 mm avant le calcul précis.

Exercice 13 — Divisibilité — chiffre inconnu et preuve algébriqueNiveau : Difficile

1. Pour que l'entier $45a6$ soit divisible par 18, quelle valeur doit prendre le chiffre a ?
2. Vrai ou faux : pour tout entier n , $(2n + 1)^2 - 1$ est divisible par 8.
3. Déterminer tous les chiffres b pour lesquels l'entier $72b54$ est divisible par 18.
4. Montrer que le carré de tout entier impair laisse un reste 1 dans la division par 8.

Exercice 14 — Multiples avec contrainte — recherche structuréeNiveau : Difficile

1. Déterminer le plus petit entier naturel strictement positif N tel que $12 \mid N$ et $5 \mid (N + 1)$.
2. Déterminer le plus petit entier naturel strictement positif N tel que $18 \mid N$ et $7 \mid (N + 1)$.
3. Vérifier que la solution précédente satisfait bien les deux contraintes.
4. Expliquer comment organiser une recherche sans tester tous les entiers un par un.

Exercice 15 — Puissances et priorités — calcul exact sans calculatriceNiveau : Difficile

1. Calculer : $(-2)^3 \times 5 + 3^2 \times 2^4 - 5 \times 2^2$.

- Calculer exactement : $\frac{2^{-3} + 4^{-2}}{2^{-5}}$.
- Réécrire le calcul de Q60 uniquement avec la base 2 avant toute addition.
- Identifier dans Q36 les trois erreurs de priorité les plus fréquentes qu'un élève pourrait commettre.

Exercice 16 — Notation scientifique — quotient à fortes compensationsNiveau : Très difficile

- Calculer : $\frac{1,3 \times 10^{-4} \times 8 \times 10^5 \times 9 \times 10^3 \times 6,5}{0,065 \times 2600 \times 10^{-3} \times 0,036}$.
- Calculer et écrire en notation scientifique : $\frac{(4 \times 10^{-3})^2 (5 \times 10^4)^3}{2 \times 10^2 \times 10^5}$.
- Calculer le quotient du résultat de Q61 par celui de Q64.
- Expliquer comment un contrôle d'ordre de grandeur permet de détecter une erreur d'exposant dans Q61.

Exercice 17 — Fractions numériques complexes — aucun arrondiNiveau : Très difficile

- Calculer exactement : $\frac{10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 3 \times (-3)}{11 \times 10^{-2} + 11 \times 10^{-3} + 0,002}$.
- Calculer exactement : $\frac{\frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{6}}{\frac{7}{8} - \frac{6}{2}}}{\frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{1}}{\frac{6}{5} - \frac{1}{4}}}$.
- Pour Q62, convertir explicitement 0,123 en fraction irréductible avant la division.
- Justifier le signe du résultat de Q63 sans refaire tout le calcul.

Exercice 18 — Puissances littérales avancées — trois simplificationsNiveau : Très difficile

- Pour $a, b \neq 0$, simplifier : $\frac{(a^{-3}b^4)^2(a^5b^{-1})^3}{a^2b^5}$.
- Pour $a, b \neq 0$, simplifier : $\frac{(a^{-2}b^3)^2}{a^{-5}b}$.
- Calculer exactement : $\frac{(2^3 \times 3^{-2})^{-1}}{6^{-2}}$.
- Calculer le produit des résultats de Q65 et Q85.

Exercice 19 — Radicaux imbriqués — somme et différenceNiveau : Très difficile

- Calculer exactement : $\sqrt{12 - 3\sqrt{7}} + \sqrt{12 + 3\sqrt{7}}$.
- Simplifier : $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.
- Montrer directement que $5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$.
- Pour la somme de Q66, vérifier le résultat en élevant l'expression finale au carré.

Exercice 20 — Radicaux conjugués — reconstruire les deux termesNiveau : Très difficile

1. Simplifier : $\sqrt{13 + 4\sqrt{10}} + \sqrt{13 - 4\sqrt{10}}$.
2. Simplifier : $\sqrt{13 + 4\sqrt{10}} - \sqrt{13 - 4\sqrt{10}}$.
3. En déduire séparément $\sqrt{13 + 4\sqrt{10}}$ et $\sqrt{13 - 4\sqrt{10}}$.
4. Calculer le produit des deux radicaux.

Exercice 21 — Conjugués — puissances et rationalisations exactesNiveau : Très difficile

1. Calculer : $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$.
2. Calculer exactement : $\frac{1}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$.
3. Calculer exactement : $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.
4. Expliquer le rôle du conjugué dans les deux dernières questions.

Exercice 22 — Fractions continues — calcul de l'intérieur vers l'extérieurNiveau : Très difficile

1. Calculer exactement :
$$\frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}{\frac{1}{\frac{1}{3}}}.$$
2. Calculer exactement :
$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}.$$
3. Calculer exactement
$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}.$$
4. Donner une procédure générale fiable pour évaluer une fraction continue finie.

Exercice 23 — Seuils de puissances et comparaison de radicauxNiveau : Très difficile

1. Quel est le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 10^6$?
2. On pose $A = \sqrt{7} + \sqrt{2}$ et $B = \sqrt{6} + \sqrt{3}$. Comparer A et B .
3. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $3^n > 10^5$.
4. Expliquer pourquoi comparer les carrés est légitime dans Q76.

Exercice 24 — Divisibilité — preuves avec entiers consécutifsNiveau : Très difficile

1. Vrai ou faux : la somme de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 3.
2. Vrai ou faux : le produit de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 6.
3. Montrer que la somme de cinq entiers consécutifs est toujours divisible par 5.

4. Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs est toujours divisible par 24.

Exercice 25 — Carrés parfaits — parité des exposants premiers

Niveau : Très difficile

1. Vrai ou faux : pour tout entier impair n , $n^4 - 1$ est divisible par 16.
2. Déterminer le plus petit entier naturel strictement positif m tel que $540m$ soit un carré parfait.
3. Déterminer le plus petit entier $m > 0$ tel que $756m$ soit un carré parfait.
4. Formuler le critère général sur les exposants de la décomposition en facteurs premiers d'un carré parfait.

Exercice 26 — PGCD et PPCM — applications structurées

Niveau : Très difficile

1. Déterminer le plus petit entier strictement positif divisible à la fois par 18 et par 24.
2. On possède 252 cartes rouges et 198 cartes bleues. On veut former le plus grand nombre de lots identiques sans reste. Combien de lots peut-on former ?
3. Calculer PGCD(756, 630) par l'algorithme d'Euclide.
4. Calculer PPCM(72, 90) par décomposition en facteurs premiers.

Exercice 27 — Multiples extrêmes et contraintes simultanées

Niveau : Très difficile

1. Quel est le plus grand multiple de 37 inférieur ou égal à 1000 ?
2. Déterminer le plus petit entier naturel strictement positif N tel que $14 \mid N$ et $9 \mid (N + 1)$.
3. Quel est le plus grand multiple de 43 inférieur ou égal à 2000 ?
4. Déterminer le plus petit entier naturel strictement positif N tel que $18 \mid N$ et $7 \mid (N + 1)$.

Exercice 28 — Applications scientifiques — échelles gigantesques et microscopiques

Niveau : Très difficile

1. En prenant 365 jours par an, calculer la distance parcourue en une année par la lumière à la vitesse 3×10^8 m/s. Donner le résultat en notation scientifique.
2. Un cheveu a une épaisseur de $70 \mu\text{m}$. Un atome a un diamètre de 0,2 nm. Combien de diamètres atomiques correspondent à l'épaisseur du cheveu ?
3. Exprimer la distance de Q87 en kilomètres, en notation scientifique.
4. Interpréter le résultat de Q88 par un ordre de grandeur.

Exercice 29 — Nombre d'or — puissances et suite de coefficients

Niveau : Très difficile

1. On pose $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Exprimer φ^5 sous la forme $a\varphi + b$.
2. On pose $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Exprimer φ^6 sous la forme $a\varphi + b$.
3. Retrouver φ^4 sous la forme $a\varphi + b$.
4. Observer les coefficients de $\varphi^2, \varphi^3, \dots, \varphi^6$ et décrire la règle de récurrence.

Exercice 30 — Bilan très difficile — calcul exact multi-techniques

Niveau : Très difficile

1. Calculer exactement $A = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{6}}{\frac{8}{9} - \frac{2}{3}}$.
2. Calculer exactement $B = \sqrt{13 + 4\sqrt{10}} \sqrt{13 - 4\sqrt{10}}$.
3. Déterminer le plus petit entier $m > 0$ tel que $450m$ soit un carré parfait.
4. Calculer exactement $D = \frac{(2^3 \times 5^{-2})^{-1}}{10^{-2}}$.