

2^{nde} – Cours

Équations et inéquations

1 Équation, solution, ensemble de solutions

Une **équation** est une égalité dans laquelle apparaît une inconnue (souvent notée x). Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui rendent cette égalité vraie.

Ces valeurs sont les **solutions** de l'équation. L'**ensemble des solutions** est souvent noté S .

Exemple : résoudre $2x - 3 = 5$.

$$2x - 3 = 5 \iff 2x = 8 \iff x = 4, \quad S = \{4\}.$$

2 Équations du 1^{er} degré : $ax + b = c$

Une équation du type $ax + b = c$ (avec $a \neq 0$) se résout en isolant l'inconnue :

- on regroupe les termes en x d'un côté, les nombres de l'autre ;
- on divise par le coefficient de x .

Exemple : résoudre $3x + 4 = 1$.

$$3x + 4 = 1 \iff 3x = 1 - 4 \iff 3x = -3 \iff x = -1.$$

Si le coefficient devant x est nul, on tombe sur une équation de la forme $b = c$ (soit vraie pour tout réel, soit fausse pour tout réel).

3 Équations avec fractions

Pour une équation contenant des fractions, on peut se débarrasser des dénominateurs en multipliant les deux membres par un même nombre non nul.

Exemple :

$$\frac{3x - 2}{4} = \frac{x + 1}{2}.$$

On multiplie les deux membres par 4 (dénominateur commun) :

$$3x - 2 = 2(x + 1) \iff 3x - 2 = 2x + 2 \iff x = 4.$$

Attention : on ne multiplie jamais par une quantité qui pourrait être nulle (on vérifie les dénominateurs et on exclut les valeurs interdites au besoin).

4 Équations-produits

Une équation du type

$$A(x) \cdot B(x) = 0$$

est appelée **équation-produit**.

Elle est équivalente à

$$A(x) = 0 \quad \text{ou} \quad B(x) = 0.$$

Exemple : résoudre $(2x - 3)(x + 1) = 0$.

$$(2x - 3)(x + 1) = 0 \iff 2x - 3 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -1.$$

5 Inéquations du 1^{er} degré

Une **inéquation** est une relation du type

$$ax + b < c, \quad ax + b \leq c, \quad ax + b > c, \quad ax + b \geq c.$$

Résoudre une inéquation, c'est trouver **tous** les réels x qui vérifient la relation.

On applique les mêmes opérations aux deux membres (addition, soustraction, multiplication, division), en respectant les points suivants :

- on peut ajouter ou soustraire le même nombre des deux côtés sans changer le sens ;
- on peut multiplier ou diviser par un nombre **positif** sans changer le sens de l'inégalité ;
- on doit **inverser le sens** de l'inégalité lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre **négatif**.

Exemple :

$$-2x + 5 \leq 1 \iff -2x \leq -4.$$

En divisant par -2 (nombre négatif) :

$$x \geq 2.$$

6 Doubles inéquations

Une double inéquation regroupe deux inéquations :

$$a \leq 2x + 1 < b.$$

On peut travailler sur les trois membres en même temps, en appliquant les mêmes opérations à a , au milieu et à b .

Exemple :

$$1 \leq 2x + 3 < 7.$$

On soustrait 3 aux trois membres :

$$-2 \leq 2x < 4.$$

Puis on divise par $2 > 0$:

$$-1 \leq x < 2.$$

7 Interpréter une solution dans un problème

Dans un problème concret, l'inconnue représente souvent une quantité (longueur, prix, durée...). Une solution doit être :

- mathématiquement correcte ;
- mais aussi **cohérente avec la situation** (positive, entière, etc.).

On peut être amené à restreindre l'ensemble des solutions pour tenir compte du contexte : « x représente un nombre de billets », « t représente un temps », etc.