Calcul littéral et équations

Seconde — Cours

I. Rappels : calcul littéral

En calcul littéral, on utilise des lettres (souvent x, y, a, b) pour représenter des nombres. Une *expression littérale* contient des nombres, des lettres et des opérations.

- $3x + 5$;
- $2a^2 - 7a + 1$;
- $\frac{5}{2}x - 4$.

On applique les mêmes règles de calcul qu'avec les nombres, mais en gardant les lettres.

II. Réduire, développer, factoriser

1. Réduire une expression

Réduire une expression, c'est :

- supprimer les parenthèses si possible ;
- regrouper les termes semblables (même partie littérale).

$$\begin{aligned} 3x + 5x - 2 &= (3+5)x - 2 = 8x - 2, \\ 7a - 4a + 9 &= (7-4)a + 9 = 3a + 9, \\ 2y - 5 + 7y + 8 &= (2+7)y + (-5+8) = 9y + 3. \end{aligned}$$

2. Développer une expression

Distributivité simple. Pour tout k, a, b :

$$k(a+b) = ka + kb \quad \text{et} \quad k(a-b) = ka - kb.$$

$$\begin{aligned} 3(x+4) &= 3x + 12, \\ -2(5x-1) &= -10x + 2, \\ 7(2x-3) &= 14x - 21. \end{aligned}$$

Produits remarquables (initiation). Pour tout a, b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= x^2 + 6x + 9, \\ (2x-5)^2 &= 4x^2 - 20x + 25, \\ (3x-1)(3x+1) &= 9x^2 - 1. \end{aligned}$$

3. Factoriser une expression

Factoriser, c'est écrire l'expression sous forme de produit (opération inverse de développer).

a) Mise en évidence. On cherche un facteur commun.

$$\begin{aligned} 5x + 15 &= 5(x+3), \\ 9a^2 - 3a &= 3a(3a-1), \\ x^2 - 10x &= x(x-10). \end{aligned}$$

b) Avec les identités remarquables. On reconnaît une forme du type

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2, \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 25 &= (x-5)^2, \\ 4x^2 - 9 &= (2x-3)(2x+3). \end{aligned}$$

III. Équations du premier degré

1. Définitions

Une **équation** est une égalité contenant une inconnue (notée x par exemple). Une **solution** est un nombre qui rend l'égalité vraie lorsqu'on le remplace à la place de x.
Exemple : *Pour l'équation $4x - 7 = 9$, en remplaçant x par 4 :*

$$4 \cdot 4 - 7 = 16 - 7 = 9,$$

l'égalité est vraie. Donc $x = 4$ est solution.

2. Règles de résolution

On peut :
- ajouter ou soustraire le même nombre aux deux membres ;
- multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre non nul.

Ces opérations ne changent pas l'ensemble des solutions.

3. Équations de la forme $ax + b = c$

Pour résoudre $ax + b = c$ avec $a \neq 0$:
1. on isole le terme en x : $ax = c - b$;
2. on divise par a : $x = \dfrac{c-b}{a}$.

$$\begin{array}{lclcl} 4x - 7 = 9 & \iff & 4x = 16 & \iff & x = 4, \\ 5x + 3 = 2x - 9 & \iff & 3x = -12 & \iff & x = -4. \end{array}$$

4. Équations avec parenthèses

On commence par développer, puis on résout.

$$\begin{array}{rclcl} 3(x-2) = 2x + 5 & \iff & 3x - 6 = 2x + 5 & \iff & x = 11, \\ 2(x+4) - 3(x-1) = 7 & \iff & -x + 11 = 7 & \iff & x = 4. \end{array}$$

5. Équations avec fractions

On se débarrasse des dénominateurs en multipliant par un nombre non nul.

$$\frac{2x-1}{5} = 3 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x-1=15 \quad\Longleftrightarrow\quad x=8,$$

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3} = 5 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{5x}{6}=5 \quad\Longleftrightarrow\quad 5x=30 \quad\Longleftrightarrow\quad x=6.$$

6. Équations-produit

Si un produit est nul :

$$A \times B = 0 \Longleftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

$$(x-3)(x+2)=0 \Longleftrightarrow x-3=0 \text{ ou } x+2=0 \Longleftrightarrow x=3 \text{ ou } x=-2,$$

$$(2x+1)(x-4)=0 \Longleftrightarrow x=-\frac{1}{2} \text{ ou } x=4.$$