# Dérivation et étude de fonctions — 1ère STI2D

## A — Nombre dérivé et tangentes

**Exercice 1 — Taux de variation et nombre dérivé** *Essentiel* Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

1. Calculer $f(1)$ puis $f(1+h)$.
2. Simplifier $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ pour $h \neq 0$.
3. En déduire $f'(1)$ et interpréter le résultat.

---

**Exercice 2 — Vitesse instantanée** *Moyen* La position d'un mobile (en m) est $s(t) = t^2 + 2t$, pour $0 \leq t \leq 6$.

1. Calculer la vitesse moyenne entre 2 et $2+h$ ($h \neq 0$ et $2+h \in [0;6]$).
2. En déduire $s'(2)$.
3. Calculer $s'(5)$ et donner les unités.

---

**Exercice 3 — Lecture d'une tangente** *Essentiel* Une courbe passe par $A(2;3)$ et sa tangente en $A$ passe par $B(5;9)$.

1. Déterminer le coefficient directeur de cette tangente.
2. Donner $f(2)$ et $f'(2)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente.

---

**Exercice 4 — Tangente à une parabole** *Essentiel* Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f(2)$ et $f'(2)$.
3. Trouver l'équation de la tangente en $x = 2$.

---

**Exercice 5 — Tangentes parallèles** *Moyen* Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

1. Trouver les abscisses des tangentes de pente 2.
2. Donner les équations de ces tangentes.
3. Existe-t-il une tangente horizontale ?

---

**Exercice 6 — Tangentes à une fonction cubique** *Avancé* Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 0$.
3. Trouver les points où la tangente est horizontale.

---

## B — Calculs de dérivées

**Exercice 7 — Dérivation de polynômes** *Essentiel* Dériver sur $\mathbb{R}$ les trois fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x - 9$.
2. $g(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 8x - 1$.
3. $h(x) = 7 - 2x^3$.

---

## C — Signes et variations

**Exercice 8 — Dérivée factorisée et son signe** *Moyen* Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

1. Calculer et factoriser $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) \geq 0$.
3. Déduire les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.

---

**Exercice 9 — Une dérivée toujours positive** *Moyen* Soit $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 2$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 3(x+1)^2 + 1$.
2. En déduire les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.

---

**Exercice 10 — Étude d'un trinôme** *Moyen* Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ sur $[-1; 6]$.

1. Étudier le signe de $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de $f$.
3. Trouver son minimum et son maximum sur l'intervalle.

---

**Exercice 11 — Étude d'une fonction cubique** *Avancé* Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ sur $[0; 5]$.

1. Factoriser $f'(x)$.
2. Dresser son tableau de signes.
3. Dresser le tableau de variations et déterminer les extrema globaux.

---

**Exercice 12 — Variations à partir d'une dérivée donnée** *Avancé* On considère une fonction $g$ sur $[-2; 5]$ telle que $g'(x)$ a le signe de $-2(x+1)(x-3)$. On donne $g(-2) = 0$, $g(-1) = -5$, $g(3) = 11$, $g(5) = 3$.

1. Déterminer les intervalles de monotonie.
2. Dresser le tableau de variations.
3. Identifier minimum et maximum sur $[-2; 5]$.

---

**Exercice 13 — Factoriser pour étudier les variations** *Moyen* Soit $f(x) = -x^2 + 8x - 6$ sur $[0; 9]$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations.
3. Calculer le maximum et les valeurs aux bornes.

---

**Exercice 14 — Un minimum et une tangente** *Moyen* Soit $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$ sur $[0; 5]$.

1. Étudier les variations.
2. Calculer le minimum.
3. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 1$.

---

**Exercice 15 — Optimiser l'aire d'un panneau***Moyen* Un panneau rectangulaire a un périmètre de 24 m. Sa largeur est $x$ mètres.

1. Exprimer la longueur et le domaine de $x$.
2. Exprimer son aire $A(x)$.
3. Déterminer les dimensions optimales.

---

## D — Applications technologiques

**Exercice 16 — Puissance d'un équipement** *Moyen* Sur $[0; 10]$, une puissance électrique (en W) est $P(I) = 20I - 2I^2$, $I$ étant l'intensité (en A).

1. Calculer $P'(I)$ et son signe.
2. Déterminer la puissance maximale.

3. Interpréter les valeurs $I = 0$, $I = 5$ et $I = 10$.

---

**Exercice 17 — Vitesse et déplacement** *Moyen* La position d'un chariot (en m) est $s(t) = -t^2 + 6t + 1$ sur $[0; 6]$.

1. Calculer la vitesse $v(t) = s'(t)$.
2. À quel instant le chariot s'arrête-t-il ?
3. Déterminer la position maximale.

---

**Exercice 18 — Coût total et coût marginal** *Avancé* Pour $x \in [0; 6]$ centaines de capteurs, le coût total (en milliers d'euros) est $C(x) = x^3 - 6x^2 + 30x + 100$.

1. Calculer $C'(x)$ et $C'(2)$.
2. Étudier les variations de $C$.
3. Interpréter $C'(2)$ avec les unités.

---

**Exercice 19 — Bénéfice maximal d'un atelier** *Moyen* Le bénéfice (en centaines d'euros) est $B(x) = -3x^2 + 36x - 60$, où $x \in [0; 10]$ est un nombre de dizaines d'objets.

1. Dériver $B$.
2. Trouver la production qui maximise le bénéfice.
3. Exprimer le bénéfice maximal en euros.

---

**Exercice 20 — Hauteur maximale d'un mécanisme** *Moyen* La hauteur d'un dispositif (en m) est $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$ sur $[0; 4]$ secondes.

1. Déterminer sa vitesse verticale.
2. À quel instant la hauteur est-elle maximale ?
3. Calculer cette hauteur.

---

**Exercice 21 — Contrôle : tangente et variations** *Avancé* Soit $f(x) = x^2 - 2x - 3$ sur $[-1; 4]$.

1. Calculer $f'(2)$ avec un taux de variation.
2. Donner l'équation de la tangente en $x = 2$.
3. Étudier les variations et les extrema sur l'intervalle.

---

## E — Synthèses

**Exercice 22 — Synthèse : profit d'une entreprise** *Avancé* Pour $x \in [0; 8]$, le bénéfice (en centaines d'euros) est $B(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 10$, $x$ comptant des dizaines de produits.

1. Factoriser $B'(x)$.
2. Étudier ses variations.
3. Déterminer le bénéfice maximal sur $[0; 8]$.

---

**Exercice 23 — Lire et justifier un tableau de variations** *Avancé* Une fonction dérivable $f$ sur $[0; 8]$ vérifie : $f'(x)$ a le même signe que $3(x - 2)(x - 6)$, et $f(0) = 4$, $f(2) = 24$, $f(6) = -8$, $f(8) = 12$.

1. Compléter son tableau de variations.
2. Trouver le maximum et le minimum globaux.
3. Donner les abscisses des tangentes horizontales.

---

**Exercice 24 — Application : aire sous contrainte** *Avancé* Avec 40 m de clôture, on borde trois côtés d'un enclos rectangulaire, le quatrième étant un mur. On note $x$ la largeur perpendiculaire au mur.

1. Exprimer la longueur et l'aire en fonction de $x$.
2. Déterminer le domaine pertinent.
3. Trouver les dimensions qui maximisent l'aire.

**Exercice 25 — Quotient : dérivée et domaine** *Bonus* Soit $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-4}$ définie pour $x \neq 2$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer ses variations sur chaque intervalle de définition.
3. Calculer les limites au voisinage de 2 et aux infinis.

## F — Approfondissements facultatifs

**Exercice 26 — Produit de deux fonctions** *Bonus* Soit $f(x) = (2x-3)(x^2+1)$.

1. Calculer $f'(x)$ sans développer $f$.
2. Développer et simplifier le résultat.

**Exercice 27 — Puissance composée** *Bonus* Soit $g(x) = (3x-2)^4$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Trouver les tangentes horizontales.
3. Dresser les variations de $g$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 28 — Coût moyen rationnel** *Bonus* Le coût moyen est $M(x) = x + \dfrac{16}{x}$ sur $[1;10]$.

1. Calculer et factoriser $M'(x)$.
2. Étudier les variations de $M$.
3. Déterminer sa valeur minimale.

**Exercice 29 — Tangentes parallèles à une droite** *Bonus* Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Déterminer les abscisses où la tangente à la courbe est parallèle à $y = 3x + 2$, et écrire les équations des tangentes correspondantes.

**Exercice 30 — Optimisation électrique : quotient** *Bonus* Pour $R > 0$ (en $\Omega$), la puissance en W est $P(R) = \dfrac{100R}{(R+5)^2}$.

1. Calculer $P'(R)$.
2. Dresser le tableau de variations pour $R > 0$.
3. Déterminer la résistance donnant la puissance maximale.