

Variables aléatoires réelles

Exercice 1 — Dé, loi et événements

Facile

On lance un dé équilibré à six faces et on note X le numéro obtenu.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Donner la loi de probabilité de X .
3. Calculer $P(X \leq 4)$ et $P(X \in \{2; 5\})$.
4. Calculer $E(X)$ et interpréter cette valeur.

Exercice 2 — Gain algébrique sur une pièce

Facile

On lance une pièce équilibrée. Face rapporte 4 € et Pile fait perdre 2 €. On note X le gain algébrique.

1. Donner les valeurs prises par X .
2. Écrire la loi de X dans un tableau.
3. Calculer $P(X > 0)$.
4. Calculer $E(X)$ et dire si le jeu est favorable au joueur en moyenne.

Exercice 3 — Compléter une loi de probabilité

Facile

Une variable aléatoire X prend les valeurs -1 , 2 et 5 avec les probabilités respectives $0,25$, p et $0,35$.

1. Déterminer p .
2. Vérifier que la loi obtenue est valide.
3. Calculer $P(X \geq 2)$.
4. Calculer $E(X)$.

Exercice 4 — Deux lancers de pièce : nombre de Faces

Facile

On lance deux fois une pièce équilibrée. On note X le nombre de Faces obtenues.

1. Écrire l'univers des quatre issues équiprobables.
2. Déterminer les valeurs possibles de X .
3. Établir la loi de X .
4. Calculer $P(X \leq 1)$ puis $E(X)$.

Exercice 5 — Urne et gain moyen

Facile

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire une boule au hasard. Une rouge rapporte 6 € et une bleue fait perdre 3 €. On note X le gain algébrique.

1. Donner la loi de X .
2. Calculer $P(X < 0)$.
3. Calculer $E(X)$.
4. Quel prix d'entrée c rendrait le jeu équitable si le gain net est $Y = X - c$?

Exercice 6 — Espérance, variance et écart-type

Moyen

La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x	-2	1	4
$P(X = x)$	$0,2$	$0,5$	$0,3$

1. Calculer $E(X)$.
2. Calculer $E(X^2)$.
3. En utilisant la formule de König-Huygens, calculer $V(X)$.
4. Calculer $\sigma(X)$ et donner une valeur exacte puis décimale.

Exercice 7 — Paramètre dans une loi puis dispersion

Moyen

Une variable aléatoire X prend les valeurs 0, 2 et 4 avec probabilités p , $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.

1. Déterminer p .
2. Calculer $E(X)$.
3. Calculer $E(X^2)$, puis $V(X)$.
4. Donner $\sigma(X)$ sous forme exacte.

Exercice 8 — Jeu de dé : construire la loi d'un gain

Moyen

On lance un dé équilibré. Le gain X vaut -2 € si le dé affiche 1 ou 2, 1 € s'il affiche 3, 4 ou 5, et 8 € s'il affiche 6.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer $P(X \geq 1)$.
3. Calculer $E(X)$.
4. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 9 — Prix d'entrée d'un jeu équitable

Moyen

Un jeu attribue un gain brut G : 0 € avec probabilité 0,5, 5 € avec probabilité 0,3 et 12 € avec probabilité 0,2. Le joueur paie c euros pour participer et son gain net est $X = G - c$.

1. Calculer $E(G)$.
2. Déterminer c pour que le jeu soit équitable.
3. Calculer $V(G)$ puis $\sigma(G)$.
4. Expliquer pourquoi $V(X) = V(G)$ lorsque c est fixe.

Exercice 10 — Même espérance, risques différents

Moyen

On compare deux gains aléatoires. Pour X , on a $P(X = -2) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$. Pour Y , on a $P(Y = -6) = \frac{1}{4}$ et $P(Y = 2) = \frac{3}{4}$.

1. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
2. Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.
3. Comparer les écarts-types.
4. Quel jeu choisirait un joueur qui souhaite limiter la dispersion de ses gains ? Justifier.

Exercice 11 — Deux épreuves indépendantes non équiprobables

Difficile

Deux dispositifs indépendants donnent chacun un succès ou un échec. Le premier réussit avec probabilité 0,6, le second avec probabilité 0,7. On note X le nombre total de succès.

1. Calculer les probabilités des quatre couples succès/échec.
2. Déterminer la loi de X .
3. Calculer $P(X \geq 1)$.

4. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 12 — Trois épreuves de Bernoulli

Difficile

On répète trois fois, de façon indépendante, une épreuve dont la probabilité de succès vaut $\frac{1}{3}$. On note X le nombre de succès obtenus.

1. Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 3)$.
2. En comptant les chemins possibles, déterminer $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
3. Vérifier que les quatre probabilités obtenues forment une loi.
4. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 13 — Tirage sans remise : nombre de boules rouges

Difficile

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire simultanément deux boules. On note X le nombre de boules rouges tirées.

1. Déterminer les valeurs possibles de X .
2. Déterminer la loi de X en comptant les paires équiprobables.
3. Calculer $P(X \geq 1)$.
4. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 14 — Arbre de probabilités puis loi d'un gain

Difficile

Une usine fabrique 60% de ses pièces sur la ligne A et 40% sur la ligne B. Une pièce de A est conforme avec probabilité 0,90, une pièce de B avec probabilité 0,75. Une pièce conforme rapporte 5 unités et une pièce non conforme coûte 12 unités. On note X le gain.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard soit conforme.
2. Déterminer la loi de X .
3. Calculer $E(X)$ et interpréter.
4. Calculer $V(X)$ puis $\sigma(X)$.

Exercice 15 — Transformation affine complète

Difficile

La variable X prend les valeurs -1 , 2 , 5 avec probabilités $0,2$, $0,5$, $0,3$. On pose $Y = 3X - 4$.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Calculer directement $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3. En utilisant les propriétés de $aX + b$, calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.
4. Vérifier $E(Y)$ directement à partir de la loi de Y .

Exercice 16 — Paramètre déterminé par une espérance imposée

Difficile

Pour un réel p , une variable X prend les valeurs -2 , 1 et 5 avec probabilités p , $2p$ et $1 - 3p$. On impose $E(X) = 2$.

1. Déterminer l'intervalle des valeurs de p pour lesquelles le tableau définit une loi.
2. Exprimer $E(X)$ en fonction de p .
3. Déterminer p grâce à la condition $E(X) = 2$.
4. Pour cette valeur de p , calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 17 — Loterie : prix équitable et risque

Difficile

Une loterie comporte 100 tickets. Un ticket gagne 80 €, quatre tickets gagnent 10 € et les autres ne gagnent rien. On choisit un ticket au hasard. On note G le gain brut et $X = G - c$ le gain net lorsque le ticket coûte c euros.

1. Déterminer la loi de G .
2. Calculer $E(G)$ et en déduire le prix équitable c .
3. Calculer $V(G)$ et $\sigma(G)$.
4. Expliquer pourquoi un jeu peut être équitable tout en restant très risqué pour un joueur qui ne joue qu'une seule fois.

Exercice 18 — Retrouver une loi à partir de l'espérance et de la variance

Difficile

Une variable X prend les valeurs -1 , 1 et 3 . On pose $p = P(X = -1)$, $q = P(X = 1)$, et $P(X = 3) = 1 - p - q$. On sait que $E(X) = 1$ et $V(X) = 2$.

1. Traduire la condition $E(X) = 1$ par une équation en p, q .
2. Utiliser $V(X) = 2$ pour déterminer $E(X^2)$, puis obtenir une seconde équation.
3. Résoudre le système et déterminer la loi de X .
4. Vérifier les deux données $E(X) = 1$ et $V(X) = 2$.

Exercice 19 — Approfondissement : minimiser une erreur quadratique moyenne

Difficile

La variable X prend les valeurs 0 , 2 , 5 avec probabilités $0,2$, $0,5$, $0,3$. Pour tout réel a , on pose $g(a) = E((X - a)^2)$.

1. Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ et $V(X)$.
2. Développer $g(a)$ et montrer que $g(a) = a^2 - 5a + \frac{19}{2}$.
3. Mettre $g(a)$ sous forme canonique.
4. Déterminer la valeur de a qui minimise $g(a)$ et interpréter le minimum obtenu.

Exercice 20 — Algorithme des trois indicateurs

Difficile

On veut calculer automatiquement espérance, variance et écart-type à partir des listes de valeurs x_i et de probabilités p_i . On teste l'algorithme avec $x = [-2, 1, 4]$ et $p = [0,2, 0,5, 0,3]$.

1. Compléter le programme Python suivant :

```
from math import sqrt
def indicateurs(x,p):
    E = 0
    E2 = 0
    for k in range(len(x)):
        E = E + .....
        E2 = E2 + .....
    V = .....
    return E, V, sqrt(V)
```

2. Expliquer le rôle de $E2$.
3. Prévoir les trois valeurs renvoyées pour les listes données.
4. Pourquoi faut-il vérifier séparément que la somme des probabilités vaut 1 ?

Exercice 21 — Simulation d'une moyenne d'échantillon

Très difficile

La variable X prend les valeurs 0 , 1 , 4 avec probabilités $0,5$, $0,3$, $0,2$. On prélève par simulation des échantillons indépendants de taille 100 et on note m leur moyenne.

1. Calculer $\mu = E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

2. Calculer l'intervalle $I = \left[\mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{100}}; \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{100}} \right]$.

3. Compléter le principe de simulation suivant :

```
from random import choices
def moyenne_echantillon():
    L = choices([0,1,4], weights=[0.5,0.3,0.2], k=100)
    return .....
```

4. On répète 1000 fois cette simulation. Expliquer ce que mesure la proportion des moyennes appartenant à I , sans affirmer qu'elle doit être exactement égale à une valeur imposée.

Exercice 22 — Assurance : prime équitable et marge

Très difficile

Pour un contrat annuel, le coût aléatoire C d'un sinistre vaut 0 € avec probabilité 0,92, 500 € avec probabilité 0,06 et 2000 € avec probabilité 0,02. L'assureur facture une prime p et son résultat est $X = p - C$.

1. Calculer $E(C)$.
2. Déterminer la prime équitable p_0 telle que $E(X) = 0$.
3. Déterminer la prime p_1 donnant un résultat moyen de 15 € par contrat.
4. Calculer $V(C)$ et $\sigma(C)$, puis expliquer pourquoi la variance de X ne dépend pas de p .

Exercice 23 — Choix d'une boîte puis gain : loi par probabilités totales

Très difficile

On choisit la boîte A avec probabilité 0,4 et la boîte B avec probabilité 0,6. La probabilité de tirer une boule rouge est 0,75 dans A et 0,25 dans B. Une boule rouge rapporte 8 € et une autre couleur fait perdre 3 €. On note X le gain.

1. Calculer $P(R)$, où R est l'événement à tirer une boule rouge.
2. Déterminer la loi de X .
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Quel droit d'entrée rendrait le jeu équitable ?

Exercice 24 — Construire une transformation à moyenne et écart-type imposés

Très difficile

On sait que $E(X) = 3$ et $V(X) = 4$. On cherche des réels a et b tels que $Y = aX + b$ vérifie $E(Y) = 10$ et $\sigma(Y) = 6$.

1. Exprimer $E(Y)$ en fonction de a, b .
2. Exprimer $\sigma(Y)$ en fonction de a .
3. Déterminer tous les couples (a, b) possibles.
4. Si l'on exige en plus que la transformation conserve l'ordre des valeurs de X , quel couple doit-on retenir ?

Exercice 25 — Paramètre fixé par la variance

Très difficile

Pour p réel, la variable X prend les valeurs 0, 2, 5 avec probabilités $p, 1 - 2p, p$. On impose $V(X) = \frac{51}{16}$.

1. Déterminer l'intervalle des valeurs admissibles de p .
2. Exprimer $E(X)$ puis $E(X^2)$ en fonction de p .
3. Montrer que $V(X) = p(13 - p)$.
4. Résoudre la condition sur la variance et retenir la valeur admissible de p . Donner alors $E(X)$.

Exercice 26 — Somme de deux dés : loi complète

Très difficile

On lance deux dés équilibrés indépendants et on note X la somme des deux numéros obtenus.

1. Établir la loi de X pour les valeurs 2 à 12.
2. Calculer $P(X \geq 10)$ et $P(5 \leq X \leq 8)$.
3. Calculer $E(X)$ puis $E(X^2)$.
4. En déduire $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 27 — Trois tirages sans remise : loi hypergéométrique

Très difficile

Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire simultanément trois boules. On note X le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer les valeurs possibles de X .
2. Établir la loi de X en utilisant des dénombrements.
3. Calculer $P(X \geq 2)$.
4. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 28 — Démontrer les formules de transformation affine

Très difficile

Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers fini et $Y = aX + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. À partir de la définition de l'espérance, démontrer que $E(Y) = aE(X) + b$.
2. En utilisant König-Huygens, démontrer que $V(Y) = a^2V(X)$.
3. En déduire $\sigma(Y) = |a|\sigma(X)$.
4. Application : si $E(X) = 2$ et $V(X) = 2$, poser $Z = \frac{X-2}{\sqrt{2}}$ et montrer que $E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$.

Exercice 29 — Jeu en deux étapes : quatre gains distincts

Très difficile

On choisit d'abord le parcours A avec probabilité 0,4, sinon le parcours B. Sur A, la réussite a probabilité 0,75 ; sur B, elle a probabilité 0,50. Les gains sont : A réussi 12 €, A échoué -4 €, B réussi 5 €, B échoué -2 €. On note X le gain.

1. Déterminer les probabilités des quatre issues finales.
2. Établir la loi de X et vérifier que la somme vaut 1.
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Le jeu demande un droit d'entrée c . Déterminer c pour que le gain net soit équitable et préciser l'effet de ce droit d'entrée sur la variance.

Exercice 30 — Synthèse : prime sur deux projets indépendants

Très difficile

Une entreprise mène deux projets indépendants, chacun réussissant avec probabilité 0,6. On note N le nombre de projets réussis. La prime brute X , en euros, vaut 0 si $N = 0$, a si $N = 1$ et 500 si $N = 2$. On souhaite que la prime moyenne soit 240 €.

1. Déterminer la loi de N .
2. Exprimer $E(X)$ en fonction de a , puis déterminer a .
3. Pour cette valeur de a , calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Après prélèvement, la prime réellement versée est $Y = 0,8X + 20$. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$, puis interpréter l'effet de cette transformation.