# Suites numériques — 1re Spécialité

## Partie 1 – Suites explicites, récurrence et variations

### Exercice 1 – Suite explicite : équation, inéquation et variations — Moyen

On considère $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = n^2 - 5n + 4.$$

1. Calculer $u_0, u_1, u_4, u_{10}$.
2. Calculer $u_{n+1}$ en fonction de $n$.
3. Déterminer les entiers naturels $n$ tels que $u_n = 40$.
4. Le nombre 41 est-il un terme de la suite ? Justifier.
5. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$, puis déterminer tous les rangs où la suite atteint son minimum.
6. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $u_n \geq 40$.

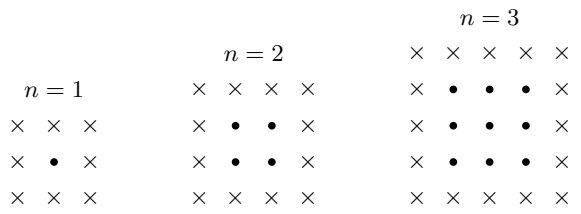
### Exercice 2 – Indices et variations dune suite quadratique — Moyen

On définit $u_n = 2n^2 - 3n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $n$.
2. Pour $n \geq 1$, exprimer $u_{n-1}$ en fonction de $n$.
3. Exprimer $u_{n+2}$ puis $u_{2n}$ en fonction de $n$.
4. Simplifier $u_{n+1} - u_n$.
5. Calculer $u_{2n} - 4u_n$.
6. Déterminer exactement les variations de la suite sur $\mathbb{N}$.
7. Déterminer le plus petit rang $n$ pour lequel $u_n > 200$.

### Exercice 3 – Motif géométrique : arbres, seuils et dénombrement — Moyen

Dans la figure de rang $n$, les pommiers forment un carré de $n \times n$ points et une rangée de conifères entoure ce carré.




1. Compléter le tableau des nombres de pommiers et de conifères pour $n = 1, 2, 3, 4$.

| Rang $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Pommiers $P_n$ | | | | |
| Conifères $C_n$ | | | | |

2. Montrer que le nombre de pommiers est $P_n = n^2$.
3. Montrer que le nombre de conifères est $C_n = 4n + 4$.
4. Existe-t-il un entier naturel non nul $n$ tel que $P_n = C_n$ ? Justifier.
5. À partir de quel rang a-t-on $P_n > C_n$ ?
6. Déterminer le premier rang pour lequel on compte au moins deux fois plus de pommiers que de conifères.

**Exercice 4 – Suite récurrente non constante : algorithme et formule** **Moyen**

On définit $(u_n)$ par $u_0 = -2$, $u_{n+1} = u_n + 3n - 1$ $(n \geq 0)$.

1. Calculer $u_1, u_2, u_3, u_4$.
2. Compléter lalgorithme suivant pour calculer $u_N$ pour un entier $N \geq 1$.

```
N = ...
u = -2
for n in range(0, N):
    u = ................
print(u)
```

3. Exécuter mentalement lalgorithme pour $N = 5$.
4. Expliquer pourquoi cette définition est une définition par récurrence.
5. Établir une formule explicite de $u_n$ en utilisant la somme $0 + 1 + \cdots + (n-1)$.
6. Déterminer le plus petit rang tel que $u_n \geq 100$.

**Exercice 5 – Tableur et récurrence : reconstituer les calculs** **Moyen**

Un tableur contient les premières valeurs suivantes dune suite $(u_n)$.

| **Ligne** | **A :** $n$ | **B :** $u_n$ |
|---|---|---|
| 2 | 0 | 2 |
| 3 | 1 | 6 |
| 4 | 2 | 17 |

Dans la cellule `B3`, la formule saisie puis recopiée vers le bas est : `=2*B2+3*A2+2`

1. Donner $u_0$, $u_1$ et $u_2$.
2. En interprétant la formule de la cellule `B3`, exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ et de $n$.
3. Calculer $u_3$ puis $u_4$.
4. Écrire la formule à saisir dans la cellule `B4` avant recopie vers le bas.
5. Cette suite est-elle arithmétique ? Justifier à partir des premiers écarts.
6. Écrire en Python une fonction `seuil()` qui renvoie le plus petit rang $n$ tel que $u_n \geq 1000$ ; déterminer ce rang par calculs successifs.

**Exercice 6 – Récurrence dordre 2 : algorithme à deux mémoires** **Défi**

On définit $(u_n)$ par $u_1 = -2$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n$ $(n \geq 1)$.

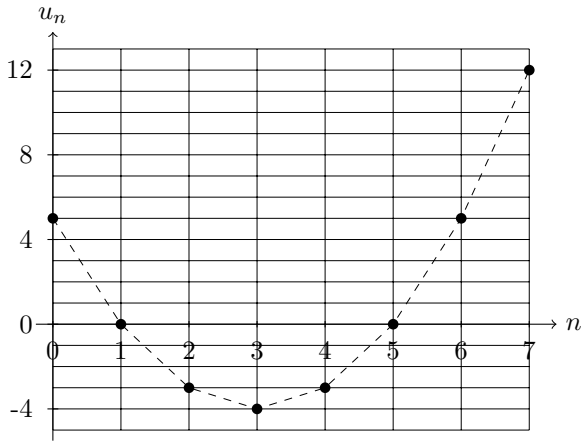
1. Calculer $u_3, u_4, u_5, u_6$.
2. Expliquer pourquoi une seule variable ne suffit pas, en général, pour calculer le terme suivant.
3. Compléter lalgorithme suivant afin de calculer $u_N$ pour $N \geq 2$.

```
a = -2      # u1
b = 1       # u2
for n in range(1, N-1):
    c = ................
    a = ................
    b = ................
print(b)
```

4. Utiliser lalgorithme pour calculer $u_{10}$.
5. Expliquer pourquoi les quatre premiers termes suffisent à montrer que la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

**Exercice 7 – Variations : du graphique à la démonstration** **Moyen**

On considère $u_n = n^2 - 6n + 5$ pour $n \in \mathbb{N}$. Le graphique des premiers termes est donné ci-dessous.




1. À partir du graphique, conjecturer le sens de variation et le rang du minimum.
2. Calculer $u_{n+1} - u_n$.
3. Étudier le signe de cette différence pour $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire les variations exactes de la suite.
5. Déterminer la valeur minimale.
6. Résoudre exactement, dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $u_n \leq 0$.

**Exercice 8 – Suite rationnelle : variations, encadrements, seuils** **Moyen**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{2n+1}{n+2}.$$

1. Calculer $u_0, u_1, u_4$.
2. Calculer et simplifier $u_{n+1} - u_n$.
3. En déduire le sens de variation de $(u_n)$.
4. Montrer que $u_n < 2$ pour tout $n$.
5. Déterminer le plus petit entier $n$ tel que $u_n \geq 1{,}5$.
6. Réécrire $u_n$ sous la forme $2 - \dfrac{3}{n+2}$ et en déduire le premier rang tel que $u_n \geq 1{,}9$.

**Exercice 9 – Variations par quotient et seuil** **Difficile**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$u_n = \frac{n+1}{3^n}.$$

1. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n$.
2. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
3. Comparer ce quotient à 1.
4. En déduire le sens de variation.
5. Calculer $u_0, u_1, u_2, u_3$ et vérifier la conclusion.
6. Sans logarithme, déterminer par encadrement le plus petit rang tel que $u_n < \dfrac{1}{100}$.

**Exercice 10 – Récurrence et variations non monotones** **Difficile**

On définit $(u_n)$ par

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = u_n + n^2 - 5n + 4.$$

1. Calculer $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$.
2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ et factoriser.
3. Étudier le signe de cette différence sur $\mathbb{N}$.
4. Décrire précisément les phases de croissance, de constance et de décroissance.
5. Déterminer la plus petite valeur prise par la suite parmi les termes calculés et justifier quelle est minimale.
6. Écrire une fonction Python qui renvoie le premier rang $n$ tel que $u_n > 40$, puis déterminer ce rang.

**Exercice 11 – Calcul dun terme, conjecture et formule explicite** **Difficile**

On définit $(u_n)$ par

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = u_n + 4n + 3.$$

1. Calculer $u_1, u_2, u_3, u_4$ et conjecturer une formule de $u_n$.
2. Compléter la fonction Python suivante pour calculer $u_N$.

```
def terme(N):
    u = 2
    for n in range(N):
        u = ................
    return u
```

3. Poser $v_n = 2n^2 + n + 2$. Vérifier que $v_0 = u_0$ et que $v_{n+1} - v_n = 4n + 3$. En déduire une formule explicite pour $u_n$.
4. En déduire le sens de variation de $(u_n)$.
5. Calculer $S_5 = u_0 + u_1 + \cdots + u_5$.
6. Déterminer sans logarithme le plus petit rang $n$ tel que $u_n > 500$.

**Exercice 12 – Récurrence dordre 2 et suites auxiliaires** **Défi**

On définit $(u_n)$ par

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer $u_2, u_3, u_4, u_5$ et vérifier que $(u_n)$ nest ni arithmétique ni géométrique.
2. Poser $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$. Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ puis exprimer $v_n$.
3. Justifier que $v_n \neq 0$. Poser $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. Montrer que $w_{n+1} = w_n + 2$ et exprimer $w_n$.
4. En déduire
$$u_n = \frac{n}{2^{n-1}} \quad (n \geq 1).$$
5. Montrer que $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ vérifie
$$S_n = 4 - \frac{2n+4}{2^n} \quad (n \geq 1).$$

# Partie 2 – Suites arithmétiques

**Exercice 13 – Suite arithmétique : retrouver des données** **Difficile**

Dans chaque situation, $(u_n)$ est une suite arithmétique.

1. Si $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $r = \dfrac{5}{4}$, calculer $u_8$ et $u_{20}$.
2. Si $u_4 = 11$ et $u_{13} = -16$, déterminer $r$ puis $u_0$.
3. Si $u_0 = -4$ et $S_{15} = \sum_{k=0}^{15} u_k = 296$, déterminer $r$.
4. Si $u_{12} = 5$ et $u_{30} = 41$, déterminer $u_0$, puis $S_{30}$ et la somme $u_{10} + u_{11} + \cdots + u_{30}$.

**Exercice 14 – Termes, rangs, sommes et seuils arithmétiques** **Difficile**

Une suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifie $u_1 = \dfrac{5}{2}$ et a pour raison $r = \dfrac{3}{2}$.

1. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
2. Calculer $u_{40}$.
3. Déterminer le rang du terme égal à 100, sil existe.
4. Le nombre 101 est-il un terme de la suite ?
5. Calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{40}$.
6. Déterminer le plus petit rang $n \geq 1$ pour lequel $u_n \geq 200$.

**Exercice 15 – Trois termes arithmétiques : somme et produit** **Difficile**

Une suite arithmétique $(u_n)$ a une raison négative. La somme de ses trois premiers termes $u_0, u_1, u_2$ vaut 60 et leur produit vaut 7280.

1. Écrire $u_0$ et $u_2$ en fonction de $u_1$ et de la raison $r$.
2. Déterminer $u_1$.
3. Montrer que $r^2 = 36$.
4. Déterminer $r$ puis les trois premiers termes.
5. Exprimer $u_n$, calculer $u_{20}$ et la somme $u_0 + \cdots + u_{20}$.

**Exercice 16 – Somme et carrés de trois termes consécutifs** **Difficile**

Une suite arithmétique a une raison strictement positive. La somme de trois termes consécutifs vaut 42 et la somme de leurs carrés vaut 660.

1. Noter les trois termes $m - r, m, m + r$ et déterminer $m$.
2. Montrer que la somme des carrés vaut $3m^2 + 2r^2$.
3. En déduire $r$.
4. Donner les trois termes.
5. Construire une suite arithmétique $(u_n)$ ayant ces trois termes comme $u_4, u_5, u_6$ et déterminer $u_0$.
6. Calculer la somme $u_4 + u_5 + \cdots + u_{18}$.

**Exercice 17 – Amphithéâtre : dénombrement et somme arithmétique** **Difficile**

Dans un amphithéâtre, la première rangée contient 18 places et chaque rangée suivante en contient 3 de plus que la précédente. On note $u_n$ le nombre de places de la $n$-ième rangée, avec $n \geq 1$.

1. Justifier que $(u_n)$ est arithmétique et donner sa raison.
2. Exprimer $u_n$.
3. Calculer le nombre de places de la 25-ième rangée.
4. Exprimer le nombre total $S_n$ de places des $n$ premières rangées.
5. Lamphithéâtre possède exactement 648 places. Déterminer le nombre de rangées.
6. Si l'on ajoute des rangées selon la même règle, combien faut-il au minimum de rangées pour dépasser 1000 places ?

**Exercice 18 – Problème inverse : terme et somme imposés** **Défi**

Une suite arithmétique $(u_n)$ vérifie $u_0 = -5$. On sait quil existe un entier $p \geq 1$ tel que

$$u_p = 43 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{p-1} u_k = 204.$$

1. Montrer que $pr = 48$, où $r$ est la raison.
2. Exprimer $u_{p-1}$ en fonction de $p$ et $r$.
3. Exprimer la somme donnée en fonction de $p$ et $r$.
4. Éliminer $r$ et déterminer $p$.
5. En déduire $r$ puis $u_n$. Vérifier les deux données.

6. Calculer $\sum_{k=p}^{2p} u_k$.

**Exercice 19 – Suite rationnelle : une suite inverse arithmétique** **Défi**

On définit $(u_n)$ par

$$u_0 = 4, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n + 1}.$$

1. Calculer $u_1, u_2, u_3$.
2. Expliquer pourquoi la relation permet de calculer successivement des termes strictement positifs à partir de $u_0$.
3. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que $(v_n)$ est arithmétique.
4. Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.
5. Étudier le sens de variation de $(u_n)$.
6. Déterminer le premier rang tel que $u_n < 0{,}05$.
7. Calculer $u_0 + u_1 + u_2$ sous forme de fraction irréductible.

**Exercice 20 – Dune suite arithmétique à une suite géométrique** **Défi**

Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$. On définit $v_n = 3^{u_n}$.

1. Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ et $r$.
2. Montrer que $(v_n)$ est géométrique et préciser sa raison.
3. On prend désormais $u_0 = 1$ et $r = 2$. Exprimer $u_n$ puis $v_n$.
4. Calculer $v_0 + v_1 + \cdots + v_5$.
5. Expliquer comment le signe de $r$ influence le sens de variation de $(v_n)$.
6. Déterminer le premier rang $n$ tel que $v_n > 10^6$.

# Partie 3 – Suites géométriques

**Exercice 21 – Suite géométrique : retrouver des données** **Difficile**

Dans chaque situation, $(u_n)$ est une suite géométrique.

1. Si $u_0 = 12$ et $q = \dfrac{1}{2}$, calculer $u_5$ et $S_5 = \sum_{k=0}^{5} u_k$.
2. Si tous les termes sont positifs, $u_0 = 3$ et $u_2 = 27$, déterminer $q$ puis $u_5$.
3. Si $u_0 = -2$ et $u_1 = 6$, déterminer $q$, $u_4$ et $S_4$.
4. Dans le deuxième cas, déterminer le plus petit entier $n$ tel que $u_n > 10000$.
5. Pour une suite géométrique de termes strictement positifs, expliquer l'effet des cas $q > 1$, $q = 1$ et $0 < q < 1$ sur ses variations.

**Exercice 22 – Hausses successives : somme et seuil** **Difficile**

Un abonnement coûte 250 € lannée de référence. Son prix augmente de 4% chaque année. On note $p_n$ le prix après $n$ augmentations.

1. Écrire $p_{n+1}$ en fonction de $p_n$.
2. Donner la nature de $(p_n)$ et exprimer $p_n$.
3. Calculer $p_8$ au centime près.
4. Calculer $p_0 + p_1 + \cdots + p_5$ au centime près.
5. Déterminer par essais le premier rang $n$ tel que $p_n > 350$.
6. Comparer le prix obtenu après dix augmentations à celui qui résulterait d'une hausse unique de 40 %.

**Exercice 23 – Justification et emploi dune somme géométrique** **Difficile**

Soit $q \neq 1$ et

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n.$$

1. Écrire $qS_n$.
2. Soustraire $qS_n$ à $S_n$ et simplifier.
3. Démontrer ainsi
$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
4. Appliquer la formule à $q = \dfrac{1}{2}$ et $n = 9$.
5. En déduire $2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{256}$.
6. Déterminer le plus petit $n$ tel que $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} > 1{,}99$.

**Exercice 24 – Raison négative : parité et variations** **Difficile**

On considère la suite géométrique $(u_n)$ définie par

$$u_0 = 16, \qquad q = -\frac{1}{2}.$$

1. Calculer $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$.
2. Montrer que $(u_n)$ nest pas monotone.
3. Exprimer $u_{2n}$ et $u_{2n+1}$.
4. Étudier séparément le sens de variation des sous-suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$.
5. Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_7$.
6. Peut-on trouver un entier $n$ pour lequel $u_n = \dfrac{1}{8}$ ? Justifier.

**Exercice 25 – Problème inverse géométrique : raison entière** **Défi**

Une suite géométrique $(u_n)$ a pour premier terme $u_0 = -\dfrac{3}{4}$ et une raison entière relative $q$ non nulle. On sait quil existe $p \geq 1$ tel que

$$u_p = -24 \qquad \text{et} \qquad S_p = \sum_{k=0}^{p} u_k = -\frac{189}{4}.$$

1. Montrer que $q^p = 32$.
2. Lister les couples entiers $(q, p)$ possibles à partir de cette seule égalité.
3. Utiliser la somme $S_p$ pour déterminer $q$ et $p$.
4. Exprimer $u_n$.
5. Déterminer le premier rang $n$ tel que $|u_n| > 1000$.
6. Donner une formule de $\sum_{k=2}^{n} u_k$ pour tout $n \geq 2$.

**Exercice 26 – Récurrence affine et changement de suite** **Défi**

On considère $(u_n)$ définie par

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = 0{,}6u_n + 4.$$

1. Calculer $u_1, u_2, u_3$.
2. Soit $a$ un réel et $v_n = u_n + a$. Déterminer $a$ pour que $(v_n)$ soit géométrique.
3. Donner alors le premier terme et la raison de $(v_n)$.
4. Exprimer $v_n$ puis $u_n$.
5. Étudier le sens de variation de $(u_n)$.
6. Exprimer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de $n$.
7. Déterminer le premier rang tel que $u_n > 9{,}5$.

**Exercice 27 – Transformation dune récurrence rationnelle** **Défi**

On définit $(u_n)$ par $\quad u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \dfrac{4(u_n+1)}{u_n+4}$.

1. Calculer exactement $u_1, u_2, u_3$.
2. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$. Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{1}{3} v_n$.
3. Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
4. Exprimer $u_n$ en fonction de $v_n$ puis obtenir une formule explicite de $u_n$.
5. Montrer que $1 \leq u_n < 2$ pour tout $n$.
6. En déduire le sens de variation de $(u_n)$.
7. Déterminer le premier rang où $u_n > 1{,}99$.

**Exercice 28 – Suites couplées, invariant et différence géométrique** **Défi**

On définit, pour $n \geq 1$, deux suites par

$$u_1 = 15, \quad v_1 = 4, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. Calculer $u_2$ et $v_2$.
2. Poser $w_n = v_n - u_n$. Montrer que $(w_n)$ est géométrique et exprimer $w_n$.
3. Montrer que la suite $x_n = 3u_n + 8v_n$ est constante.
4. En déduire les expressions explicites de $u_n$ et $v_n$.
5. Comparer $u_n$ et $v_n$ pour tout $n$.
6. Vers quelle valeur commune les deux suites semblent-elles se rapprocher ?
7. Déterminer le premier rang où $0 < u_n - v_n < 0{,}001$.

**Exercice 29 – Évolution dinscriptions : modèle et capacité** **Défi**

Un service accueille initialement 140 élèves. Chaque année, on prévoit que 82 % de l'effectif théorique reste inscrit et que 35 nouveaux élèves arrivent. On note $u_n$ l'*effectif théorique* après $n$ années, avec $u_0 = 140$. La capacité d'accueil est de 180 élèves ; le modèle est étudié sans imposer ce plafond.

1. Calculer $u_1, u_2, u_3$.
2. Justifier la relation
$$u_{n+1} = 0{,}82u_n + 35.$$
3. Déterminer le point fixe $\ell$ de cette relation.
4. Poser $v_n = u_n - \ell$ et exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
5. Montrer que $(u_n)$ est croissante tant que $u_n < \ell$.
6. Écrire un algorithme qui renvoie le premier rang où la capacité 180 est dépassée, puis déterminer ce rang.
7. Interpréter, dans le contexte, le fait que $u_n < \ell$.

**Exercice 30 – Deux bassins : échanges et équilibre** **Défi**

Deux bassins contiennent au total 2400 mş deau. Initialement, le bassin A contient 900 mş et le bassin B 1500 mş. Chaque jour, 12% de leau de B est transférée vers A et 8% de leau de A est transférée vers B. On note $A_n$ et $B_n$ les volumes après $n$ jours.

1. Justifier $A_n + B_n = 2400$ pour tout $n$.
2. Montrer que
$$A_{n+1} = 0{,}8A_n + 288.$$
3. Calculer $A_1, A_2, A_3$.
4. Poser $V_n = A_n - 1440$. Montrer que $(V_n)$ est géométrique et exprimer $A_n$ puis $B_n$.
5. Étudier le sens de variation de $(A_n)$ et de $(B_n)$.
6. Déterminer par tableau ou algorithme le premier rang $n$ tel que $A_n \geq 1400$.
7. Interpréter la valeur 1440 dans le contexte.
8. Quel volume d'eau le bassin B contiendra-t-il lorsque celui de A dépasse pour la première fois $1400\,\mathrm{m}^3$ ?