

Suites numériques 1re Spécialité

A – Suites définies explicitement

Exercice 1 – Suite explicite : calculs et recherche dun rang

Facile

On considère (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = n^2 - 5n + 4.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_4, u_{10} .
2. Calculer u_{n+1} en fonction de n .
3. Déterminer les entiers naturels n tels que $u_n = 40$.
4. Le nombre 41 est-il un terme de la suite ? Justifier.

Exercice 2 – Manipuler les indices dune suite explicite

Facile

On définit $u_n = 2n^2 - 3n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
2. Pour $n \geq 1$, exprimer u_{n-1} en fonction de n .
3. Exprimer u_{n+2} puis u_{2n} en fonction de n .
4. Simplifier $u_{n+1} - u_n$.
5. Calculer $u_{2n} - 4u_n$.

Exercice 3 – Motif géométrique : pommiers et conifères

Facile

Dans la figure de rang n , les pommiers forment un carré de $n \times n$ points et une rangée de conifères entoure ce carré.

				$n = 3$
				× × × × ×
			$n = 2$	× • • • ×
	$n = 1$	× × × ×	× • • ×	× • • • ×
× × ×		× • • ×	× • • ×	× • • • ×
× • ×		× • • ×	× • • ×	× • • • ×
× × ×		× × × ×	× × × ×	× × × × ×

1. Compléter le tableau des nombres de pommiers et de conifères pour $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Montrer que le nombre de pommiers est $P_n = n^2$.
3. Montrer que le nombre de conifères est $C_n = 4n + 4$.
4. Existe-t-il un entier naturel non nul n tel que $P_n = C_n$? Justifier.
5. À partir de quel rang a-t-on $P_n > C_n$?

B – Suites définies par récurrence

Exercice 4 – Suite définie par récurrence et algorithme

Facile

On définit (u_n) par

$$u_0 = -2, \quad u_{n+1} = u_n + 3n - 1 \quad (n \geq 0).$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 .
2. Compléter l'algorithme suivant pour calculer u_N pour un entier $N \geq 1$.

```

N = ...
u = -2
for n in range(0, N):
    u = .....
print(u)

```

1. Exécuter mentalement l'algorithme pour $N = 5$.
2. Expliquer pourquoi cette définition est une définition par récurrence.

Exercice 5 – Retrouver une récurrence à partir d'un tableur

Facile

Un tableur donne $u_0 = 2$, $u_1 = 6$, $u_2 = 17$. La formule saisie pour produire la ligne suivante est de la forme : à deux fois le terme précédent, plus trois fois le rang précédent, plus 2.

1. Donner u_0, u_1, u_2 .
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et de n .
3. Calculer u_3 puis u_4 .
4. Écrire la formule de tableur correspondante à la ligne suivante.
5. La suite est-elle arithmétique ? Justifier.

Exercice 6 – Récurrence d'ordre 2 : calculer avec deux mémoires

Moyen

On définit (u_n) par

$$u_1 = -2, \quad u_2 = 1, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n \quad (n \geq 1).$$

1. Calculer u_3, u_4, u_5, u_6 .
2. Expliquer pourquoi une seule variable ne suffit pas, en général, pour calculer le terme suivant.
3. Compléter l'algorithme suivant afin de calculer u_N pour $N \geq 2$.

```

a = -2      # u1
b = 1       # u2
for n in range(1, N-1):
    c = .....
    a = .....
    b = .....
print(b)

```

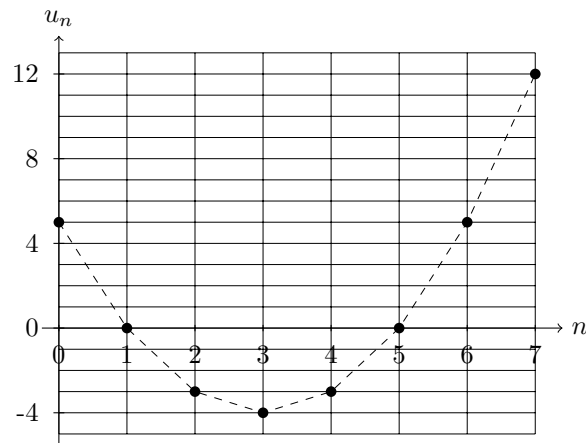
1. Utiliser l'algorithme pour calculer u_{10} .

C – Étudier les variations

Exercice 7 – Variations : conjecture graphique puis preuve

Moyen

On considère $u_n = n^2 - 6n + 5$ pour $n \in \mathbb{N}$. Le graphique des premiers termes est donné ci-dessous.



1. À partir du graphique, conjecturer le sens de variation et le rang du minimum.
2. Calculer $u_{n+1} - u_n$.
3. Étudier le signe de cette différence pour $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire les variations exactes de la suite.
5. Déterminer la valeur minimale.

Exercice 8 – Variations, encadrement et seuil d'une suite rationnelle

Moyen

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{2n+1}{n+2}.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_4 .
2. Calculer et simplifier $u_{n+1} - u_n$.
3. En déduire le sens de variation de (u_n) .
4. Montrer que $u_n < 2$ pour tout n .
5. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geq 1,5$.

Exercice 9 – Variations par quotient de deux termes consécutifs

Moyen

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$u_n = \frac{n+1}{3^n}.$$

1. Montrer que $u_n > 0$ pour tout n .
2. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
3. Comparer ce quotient à 1.
4. En déduire le sens de variation.
5. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et vérifier la conclusion.

Exercice 10 – Variations d'une suite définie par récurrence

Moyen

On définit (u_n) par

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = u_n + n^2 - 5n + 4.$$

1. Calculer $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$.
2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ et factoriser.
3. Étudier le signe de cette différence sur $\mathbb{N}$.
4. Décrire précisément les phases de croissance, de constance et de décroissance.
5. Déterminer la plus petite valeur prise par la suite parmi les termes calculés et justifier quelle est minimale.

D – Suites arithmétiques

Exercice 11 – Suite arithmétique : bilan multi-données

Difficile

Dans chaque situation, (u_n) est une suite arithmétique.

1. Si $u_0 = \frac{3}{2}$ et $r = \frac{5}{4}$, calculer u_8 et u_{20} .
2. Si $u_4 = 11$ et $u_{13} = -16$, déterminer r puis u_0 .
3. Si $u_0 = -4$ et $S_{15} = \sum_{k=0}^{15} u_k = 296$, déterminer r .
4. Si $u_{12} = 5$ et $u_{30} = 41$, déterminer u_0 puis S_{30} .

Exercice 12 – Suite arithmétique : appartenance d'un nombre et somme

Difficile

Une suite arithmétique $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifie $u_1 = \frac{5}{2}$ et a pour raison $r = \frac{3}{2}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Calculer u_{40} .
3. Déterminer le rang du terme égal à 100, s'il existe.
4. Le nombre 101 est-il un terme de la suite ?
5. Calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{40}$.

Exercice 13 – Trois termes arithmétiques : somme et produit

Difficile

Une suite arithmétique (u_n) a une raison négative. La somme de ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2 vaut 60 et leur produit vaut 7280.

1. Écrire u_0 et u_2 en fonction de u_1 et de la raison r .
2. Déterminer u_1 .
3. Montrer que $r^2 = 36$.
4. Déterminer r puis les trois premiers termes.
5. Exprimer u_n et calculer u_{20} .

Exercice 14 – Trois termes arithmétiques : somme et somme des carrés

Difficile

Une suite arithmétique a une raison strictement positive. La somme de trois termes consécutifs vaut 42 et la somme de leurs carrés vaut 660.

1. Noter les trois termes $m - r, m, m + r$ et déterminer m .
2. Montrer que la somme des carrés vaut $3m^2 + 2r^2$.
3. En déduire r .
4. Donner les trois termes.
5. Construire une suite arithmétique (u_n) ayant ces trois termes comme u_4, u_5, u_6 et déterminer u_0 .

Exercice 15 – Rangées d'un amphithéâtre : somme arithmétique

Difficile

Dans un amphithéâtre, la première rangée contient 18 places et chaque rangée suivante en contient 3 de plus que la précédente. On note u_n le nombre de places de la n -ième rangée, avec $n \geq 1$.

1. Justifier que (u_n) est arithmétique et donner sa raison.
2. Exprimer u_n .
3. Calculer le nombre de places de la 25-ième rangée.
4. Exprimer le nombre total S_n de places des n premières rangées.
5. L'amphithéâtre possède exactement 648 places. Déterminer le nombre de rangées.

E – Suites géométriques

Exercice 16 – Suite géométrique : bilan multi-données

Difficile

Dans chaque situation, (u_n) est une suite géométrique.

1. Si $u_0 = 12$ et $q = \frac{1}{2}$, calculer u_5 et $S_5 = \sum_{k=0}^5 u_k$.
2. Si tous les termes sont positifs, $u_0 = 3$ et $u_2 = 27$, déterminer q puis u_5 .
3. Si $u_0 = -2$ et $u_1 = 6$, déterminer q , u_4 et S_4 .
4. Dans le deuxième cas, déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 10000$.

Exercice 17 – Évolution en pourcentage : prix, somme et seuil

Difficile

Un abonnement coûte 250 € l'année de référence. Son prix augmente de 4% chaque année. On note p_n le prix après n augmentations.

1. Écrire p_{n+1} en fonction de p_n .
2. Donner la nature de (p_n) et exprimer p_n .
3. Calculer p_8 au centime près.
4. Calculer $p_0 + p_1 + \dots + p_5$ au centime près.
5. Déterminer par essais le premier rang n tel que $p_n > 350$.

Exercice 18 – Démonstration de la formule de somme géométrique

Difficile

Soit $q \neq 1$ et

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n.$$

1. Écrire qS_n .
2. Soustraire qS_n à S_n et simplifier.
3. Démontrer ainsi

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

4. Appliquer la formule à $q = \frac{1}{2}$ et $n = 9$.
5. En déduire $2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{256}$.

Exercice 19 – Raison négative : parité et non-monotonie

Difficile

On considère la suite géométrique (u_n) définie par

$$u_0 = 16, \quad q = -\frac{1}{2}.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 .
2. Montrer que (u_n) n'est pas monotone.
3. Exprimer u_{2n} et u_{2n+1} .
4. Étudier séparément le sens de variation des sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .
5. Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_7$.

Exercice 20 – Transformer une suite arithmétique par une exponentielle

Difficile

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . On définit $v_n = 3^{u_n}$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et r .
2. Montrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

- On prend désormais $u_0 = 1$ et $r = 2$. Exprimer u_n puis v_n .
 - Calculer $v_0 + v_1 + \dots + v_5$.
 - Expliquer comment le signe de r influence le sens de variation de (v_n) .
-

F – Sommes, seuils et problèmes inverses

Exercice 21 – Problème inverse sur une suite arithmétique

Très difficile

Une suite arithmétique (u_n) vérifie $u_0 = -5$. On sait qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que

$$u_p = 43 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{p-1} u_k = 204.$$

- Montrer que $pr = 48$, où r est la raison.
 - Exprimer u_{p-1} en fonction de p et r .
 - Exprimer la somme donnée en fonction de p et r .
 - Éliminer r et déterminer p .
 - En déduire r puis u_n . Vérifier les deux données.
-

Exercice 22 – Problème inverse sur une suite géométrique et seuil

Très difficile

Une suite géométrique (u_n) a pour premier terme $u_0 = -\frac{3}{4}$ et une raison entière relative q non nulle. On sait qu'il existe $p \geq 1$ tel que

$$u_p = -24 \quad \text{et} \quad S_p = \sum_{k=0}^p u_k = -\frac{189}{4}.$$

- Montrer que $q^p = 32$.
 - Lister les couples entiers (q, p) possibles à partir de cette seule égalité.
 - Utiliser la somme S_p pour déterminer q et p .
 - Exprimer u_n .
 - Déterminer le premier rang n tel que $|u_n| > 1000$.
-

G – Suites auxiliaires et transformations

Exercice 23 – Suite affine : trouver soi-même la bonne suite auxiliaire

Très difficile

On considère (u_n) définie par

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = 0,6u_n + 4.$$

- Calculer u_1, u_2, u_3 .
 - Soit a un réel et $v_n = u_n + a$. Déterminer a pour que (v_n) soit géométrique.
 - Donner alors le premier terme et la raison de (v_n) .
 - Exprimer v_n puis u_n .
 - Étudier le sens de variation de (u_n) .
 - Exprimer $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .
-

Exercice 24 – Récurrence rationnelle : linverse devient arithmétique

Très difficile

On définit (u_n) par

$$u_0 = 4, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n + 1}.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 .
2. Démontrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n .
3. On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que (v_n) est arithmétique.
4. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
5. Étudier le sens de variation de (u_n) .
6. Déterminer le premier rang tel que $u_n < 0,05$.

Exercice 25 – Récurrence homographique : transformation géométrique

Très difficile

On définit (u_n) par

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{4(u_n + 1)}{u_n + 4}.$$

1. Calculer exactement u_1, u_2, u_3 .
2. On pose $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$. Montrer que $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$.
3. Exprimer v_n en fonction de n .
4. Exprimer u_n en fonction de v_n puis obtenir une formule explicite de u_n .
5. Montrer que $1 \leq u_n < 2$ pour tout n .
6. En déduire le sens de variation de (u_n) .

Exercice 26 – Deux suites couplées : différence géométrique et invariant

Très difficile

On définit, pour $n \geq 1$, deux suites par

$$u_1 = 15, \quad v_1 = 4, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. Calculer u_2 et v_2 .
2. Poser $w_n = v_n - u_n$. Montrer que (w_n) est géométrique et exprimer w_n .
3. Montrer que la suite $x_n = 3u_n + 8v_n$ est constante.
4. En déduire les expressions explicites de u_n et v_n .
5. Comparer u_n et v_n pour tout n .
6. Vers quelle valeur commune les deux suites semblent-elles se rapprocher ?

H – Algorithmique, conjecture et récurrence

Exercice 27 – Algorithmie, conjecture puis démonstration par récurrence

Très difficile

On définit (u_n) par

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = u_n + 4n + 3.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et conjecturer une formule de u_n .
2. Compléter la fonction Python suivante pour calculer u_N .

```
def terme(N):
    u = 2
    for n in range(N):
        u = .....
    return u
```

1. Démontrer par récurrence que
2. En déduire le sens de variation de (u_n) .

$$u_n = 2n^2 + n + 2.$$

3. Calculer $S_5 = u_0 + u_1 + \cdots + u_5$.

Exercice 28 – Récurrence d'ordre 2 et deux suites auxiliaires**Très difficile**

On définit (u_n) par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 et vérifier que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. Poser $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$. Montrer que $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ puis exprimer v_n .
3. Poser $w_n = \frac{u_n}{v_n}$. Montrer que $w_{n+1} = w_n + 2$ et exprimer w_n .
4. En déduire

$$u_n = \frac{n}{2^{n-1}} \quad (n \geq 1).$$

5. Montrer que $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ vérifie

$$S_n = 4 - \frac{2n+4}{2^n} \quad (n \geq 1).$$

I – Problèmes complets de synthèse

Exercice 29 – Modélisation complète : inscriptions à un service**Très difficile**

Un service accueille 140 élèves la première année. Chaque année, 82% des élèves inscrits renouvellent leur inscription et 35 nouveaux élèves arrivent. On note u_n le effectif après n années, avec $u_0 = 140$. La capacité maximale est de 180 élèves.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 .
2. Justifier la relation

$$u_{n+1} = 0,82u_n + 35.$$

3. Déterminer le point fixe ℓ de cette relation.
 4. Poser $v_n = u_n - \ell$ et exprimer u_n en fonction de n .
 5. Montrer que (u_n) est croissante tant que $u_n < \ell$.
 6. Écrire un algorithme qui renvoie le premier rang où la capacité 180 est dépassée, puis déterminer ce rang.
-

Exercice 30 – Synthèse : échanges entre deux bassins**Très difficile**

Deux bassins contiennent au total 2400 m³ d'eau. Initialement, le bassin A contient 900 m³ et le bassin B 1500 m³. Chaque jour, 12% de l'eau de B est transférée vers A et 8% de l'eau de A est transférée vers B. On note A_n et B_n les volumes après n jours.

1. Justifier $A_n + B_n = 2400$ pour tout n .
2. Montrer que

$$A_{n+1} = 0,8A_n + 288.$$

3. Calculer A_1, A_2, A_3 .
 4. Poser $V_n = A_n - 1440$. Montrer que (V_n) est géométrique et exprimer A_n puis B_n .
 5. Étudier le sens de variation de (A_n) et de (B_n) .
 6. Déterminer par tableau ou algorithme le premier rang n tel que $A_n \geq 1400$.
 7. Interpréter la valeur 1440 dans le contexte.
-