

Produit scalaire dans le plan

Coordonnées, projections, orthogonalité, angles, droites, cercles, Al-Kashi et problèmes de synthèse

Exercice 1 – Produit scalaire en coordonnées

Dans un repère orthonormé, on considère $\vec{u}(3; -2)$, $\vec{v}(-1; 4)$.

- (a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
- (b) Calculer $(\vec{u}, \vec{v})$.
- (c) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ? Justifier.

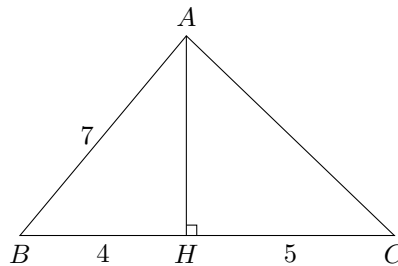
Exercice 2 – Produit scalaire à partir des normes et d'un angle

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$, $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$.

- (a) Rappeler la formule reliant le produit scalaire, les normes et le cosinus de l'angle.
- (b) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- (c) Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.
- (d) En déduire $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

Exercice 3 – Projection orthogonale dans un triangle

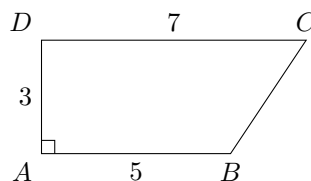
Dans le triangle ABC , H est le projeté orthogonal de A sur (BC) . On donne $AB = 7$, $BH = 4$, $HC = 5$.



- (a) Calculer AH^2 .
- (b) Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ en utilisant la projection de $\vec{BA}$ sur (BC) .
- (c) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AH}$.
- (d) Expliquer le signe de chacun des deux produits scalaires obtenus.

Exercice 4 – Produits scalaires dans un trapèze rectangle

On considère le trapèze rectangle $ABCD$ tel que $AB = 5$, $AD = 3$, $DC = 7$, avec $(AB) \perp (AD)$ et $(DC) \parallel (AB)$.



Calculer, en justifiant :

- (a) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.
- (b) $\vec{CD} \cdot \vec{AB}$.
- (c) $\vec{CA} \cdot \vec{CD}$.

Exercice 5 – Angle entre deux vecteurs

Dans un repère orthonormé, on considère $\vec{u}(4; 3)$, $\vec{v}(2; 5)$.

- (a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- (b) Calculer les normes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- (c) Déterminer la valeur exacte de $\cos \theta$, où θ est l'angle entre les deux vecteurs.
- (d) Donner une valeur approchée de θ au dixième de degré près.

Exercice 6 – Déterminer un paramètre d'orthogonalité

On considère $\vec{u}(m; 3)$, $\vec{v}(2; -4)$, $m \in \mathbb{R}$.

- (a) Exprimer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de m .
- (b) Déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
- (c) Vérifier le résultat par un calcul direct.

Exercice 7 – Montrer qu'un triangle est rectangle

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2; 1)$, $B(4; 3)$, $C(0; -5)$.

- (a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- (b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- (c) En déduire la nature du triangle ABC .
- (d) Retrouver le résultat en comparant $AB^2 + AC^2$ et BC^2 .

Exercice 8 – Droites perpendiculaires

On considère les droites $d_1 : 2x - y + 3 = 0$ et $d_2 : x + 2y - 4 = 0$.

- (a) Donner un vecteur normal à chacune des droites.
- (b) Calculer le produit scalaire de ces deux vecteurs normaux.
- (c) En déduire la position relative de d_1 et d_2 .
- (d) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 9 – Projeté orthogonal et distances sur une droite

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1; 4)$, $B(-2; 0)$, $C(6; 0)$. On note H le projeté orthogonal de A sur (BC) .

- (a) Déterminer les coordonnées de H .
- (b) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- (c) Montrer que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BH \times BC$.
- (d) En déduire BH , puis HC .

Exercice 10 – Parallélogramme et diagonales

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 5$, $AD = 3$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

- (a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
- (b) Développer $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2$ puis calculer AC .
- (c) Développer $\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\|^2$ puis calculer BD .
- (d) Comparer les longueurs des deux diagonales.

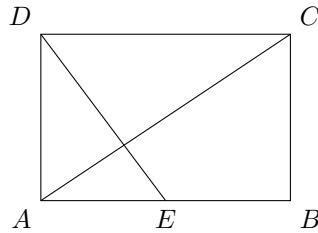
Exercice 11 – Alignement dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Soit ABC un triangle. Les points I , J et K sont définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$.

- (a) Établir que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
- (b) Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, déterminer les coordonnées de I , J et K .
- (c) Déterminer k pour que les points I , J et K soient alignés.

Exercice 12 – Angle dans un rectangle

ABCD est un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$. Le point E est le milieu de $[AB]$. On cherche l'angle θ entre $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AC}$.

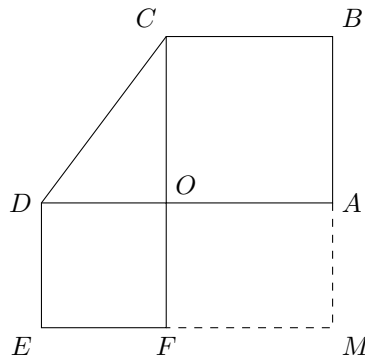


On travaille dans le repère orthonormé d'origine A , dont l'axe des abscisses est dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et l'axe des ordonnées par $\overrightarrow{AD}$.

- Donner les coordonnées de D , E et C .
- Calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Calculer exactement DE et AC .
- En déduire $\cos \theta$, puis θ au dixième de degré près.

Exercice 13 – Deux carrés et un projeté orthogonal

Dans un repère orthonormé, on considère $O(0;0)$, $A(4;0)$, $C(0;4)$, $D(-3;0)$, $M(4;-3)$. Le point H est le projeté orthogonal de M sur la droite (DC) .



- Calculer $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire ?
- Calculer $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM}$.
- Montrer que $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM} = CD \times CH$.
- En déduire la longueur exacte CH .

Exercice 14 – Travail d'une force

Une péniche est déplacée sur une distance de 60 m. Une force constante $\vec{F}$, d'intensité 1800 N, fait un angle de 30° avec la direction du déplacement $\vec{d}$.

- Rappeler l'expression du travail $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.
- Calculer la valeur exacte du travail fourni.
- Donner une valeur approchée du travail au joule près.
- Une autre force est exercée exactement dans la direction du déplacement. Quelle doit être son intensité pour fournir le même travail sur 60 m ?

Exercice 15 – Résultante de deux forces

Deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, appliquées au même point, ont pour intensités $\|\vec{F}_1\| = 300$ N, $\|\vec{F}_2\| = 400$ N, et forment un angle de 60° . On pose $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

- Calculer $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$.
- Développer $\|\vec{R}\|^2$.
- Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au newton près de $\|\vec{R}\|$.

Exercice 16 – Équation d'un cercle et tangente en un point

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(2; -3)$ et de rayon 5.

- (a) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
- (b) Vérifier que le point $A(5; 1)$ appartient à $\mathcal{C}$.
- (c) Donner un vecteur normal à la tangente à $\mathcal{C}$ au point A .
- (d) Déterminer une équation de cette tangente.

Exercice 17 – Cercle tangent à une droite

On donne $A(2; 1)$, $O(0; 0)$ et la droite $d : 2x + y = 0$. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre A et passe par O .

- (a) Calculer le rayon de $\mathcal{C}$ et donner son équation.
- (b) Vérifier que $O \in d$.
- (c) Donner un vecteur normal à d , puis calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AO}$.
- (d) Montrer que $\overrightarrow{AO}$ est normal à d .
- (e) En déduire que d est tangente à $\mathcal{C}$ au point O .

Exercice 18 – Lieu géométrique défini par $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$

Soient deux points distincts A et B tels que $AB = 8$. On cherche l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 16$.

- (a) On note H le projeté orthogonal de M sur (AB) . Exprimer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$ à l'aide de la projection algébrique de $\overrightarrow{AM}$ sur (AB) .
- (b) Montrer que le projeté H est fixe.
- (c) Décrire précisément l'ensemble $\mathcal{D}$.
- (d) Faire une figure en prenant 1 cm pour unité.

Exercice 19 – Lieu géométrique défini par $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$

Soient A et B tels que $AB = 10$, et I le milieu de $[AB]$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -12$.

- (a) Écrire $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IB}$.
- (b) Utiliser $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$ pour exprimer le produit scalaire en fonction de IM^2 et IA^2 .
- (c) En déduire la nature, le centre et le rayon de $\mathcal{C}$.

Exercice 20 – Lieu géométrique avec un milieu

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. On cherche l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.

- (a) Montrer que $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.
- (b) Transformer la condition définissant $\mathcal{E}$.
- (c) En déduire la nature de $\mathcal{E}$.
- (d) Application : $A(4; 4)$, $B(0; 0)$, $C(6; 0)$. Donner le centre, le rayon et une équation de $\mathcal{E}$.

Exercice 21 – Al-Kashi – calcul d'une longueur

Dans un triangle ABC , on donne $AB = 7$, $AC = 5$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

- (a) Écrire la relation d'Al-Kashi adaptée au côté BC .
- (b) Calculer exactement BC^2 .
- (c) En déduire la valeur exacte de BC , puis une valeur approchée au centième.
- (d) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes.

Exercice 22 – Al-Kashi – calcul d'un angle

Dans un triangle ABC , on donne $AB = 5$, $AC = 7$, $BC = 8$.

- (a) Exprimer $\cos \widehat{BAC}$ en fonction des trois longueurs.
- (b) Déterminer la valeur exacte de $\cos \widehat{BAC}$.
- (c) Donner une valeur approchée de $\widehat{BAC}$ au dixième de degré près.
- (d) L'angle $\widehat{BAC}$ est-il aigu, droit ou obtus ? Justifier sans calculatrice.

Exercice 23 – Produit scalaire, angle, aire et troisième côté

Dans un triangle ABC , on sait que $AB = 6$, $AC = 4$, et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12$.

- Déterminer la valeur exacte de $\cos \widehat{BAC}$.
- En déduire une mesure exacte de $\widehat{BAC}$.
- Calculer l'aire exacte du triangle ABC .
- Calculer exactement BC .

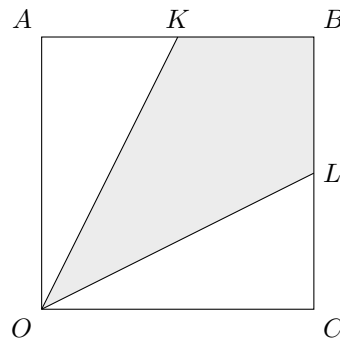
Exercice 24 – Longueurs des médianes

Dans un triangle ABC , on donne $AB = 7$, $AC = 5$, $BC = 8$. On note I , J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

- En utilisant $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, établir une expression de AI^2 en fonction de AB , AC et BC .
- Calculer exactement AI .
- Par une méthode analogue, calculer exactement BJ et CK .

Exercice 25 – Éclairage d'une place carrée

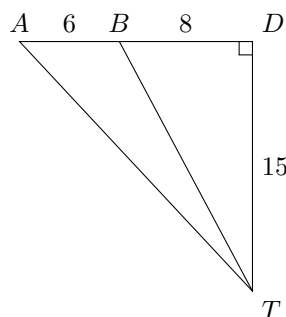
Une place carrée $OABC$ est représentée dans un repère orthonormé par $O(0;0)$, $A(0;20)$, $B(20;20)$, $C(20;0)$. Le point K est le milieu de $[AB]$ et L le milieu de $[BC]$. Un projecteur placé en O éclaire la région du carré comprise entre les demi-droites $[OK)$ et $[OL)$.



- Déterminer les coordonnées de K et L .
- Calculer l'aire de la région éclairée et son pourcentage par rapport à l'aire totale de la place.
- Calculer $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OL}$.
- Déterminer la valeur exacte de $\cos \widehat{KOL}$, puis une valeur approchée de $\widehat{KOL}$ au dixième de degré près.

Exercice 26 – Angle de tir au football

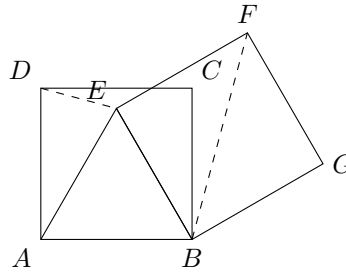
Les points A , B et D sont alignés, avec $B \in [AD]$. On donne $AB = 6$ m, $DB = 8$ m, $TD = 15$ m, et le triangle TAD est rectangle en D . Le ballon se trouve en T . On cherche l'angle de tir $\widehat{ATB}$.



- Justifier que $\overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.
- Montrer que $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = TD^2 + DA \times DB$.
- Calculer $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB}$.
- Calculer exactement TA et TB .
- En déduire $\widehat{ATB}$ au dixième de degré près.

Exercice 27 – Carrés et triangle équilatéral – démontrer une orthogonalité

On considère un triangle équilatéral AEB de côté 2. Le carré $ABCD$ est construit du même côté de (AB) que E . Le carré $BGFE$ est construit à l'extérieur du triangle sur le côté $[BE]$. On choisit le repère orthonormé tel que $A(0;0)$, $B(2;0)$, $D(0;2)$.



- Déterminer les coordonnées exactes de E .
- Déterminer les coordonnées exactes de F .
- Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BF}$.
- Calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF}$.
- Conclure sur les droites (DE) et (BF) .

Exercice 28 – Cercle de diamètre $[AB]$ et intersections

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-4;0)$, $B(4;0)$. On cherche l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M(x;y)$ vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

- Interpréter géométriquement la condition lorsque $M \neq A$ et $M \neq B$.
- Calculer le produit scalaire en coordonnées et montrer que $\mathcal{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 = 16$.
- Retrouver le centre et le rayon de $\mathcal{C}$.
- Déterminer exactement les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite $y = x$.

Exercice 29 – Cercle et deux tangentes

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(2;1)$ passant par l'origine O .

- Donner une équation de $\mathcal{C}$.
- Montrer que la droite $d : 2x + y = 0$ est tangente à $\mathcal{C}$ au point O .
- Vérifier que $B(3;-1)$ appartient à $\mathcal{C}$.
- Déterminer une équation de la tangente d' à $\mathcal{C}$ au point B .
- Les droites d et d' sont-elles perpendiculaires ? Justifier.

Exercice 30 – Synthèse complète dans un repère

Dans un repère orthonormé, on considère $A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(2;4)$.

- Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Calculer exactement AB , AC , BC .
- Déterminer la valeur exacte de $\cos \widehat{BAC}$, puis une valeur approchée de l'angle au dixième de degré près.
- Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) . Déterminer H et calculer l'aire du triangle ABC .
- Déterminer les coordonnées du centre I du cercle circonscrit au triangle ABC .
- Donner une équation du cercle circonscrit.
- Déterminer une équation de la tangente à ce cercle au point B .