1ère Spécialité Mathématiques
Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 1 — Conditionnelle, intersection et complément — *

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}4$ et $P_A(B) = 0{,}35$. On sait en plus que $P(B) = 0{,}5$.

1. Calculer la probabilité que les événements A et B soient réalisés simultanément.
2. Sachant que l'événement A est réalisé, calculer la probabilité que l'événement B ne soit pas réalisé.
3. Calculer la probabilité que l'événement A soit réalisé et que l'événement B ne le soit pas.
4. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Exercice 2 — Tableau croisé — équipe de rugby — *

Dans une équipe de rugby, il y a 35 joueurs sous contrat : 21 avants et 14 arrières. Parmi les avants, 15 pèsent plus de 100 kg ; parmi les arrières, 3 pèsent plus de 100 kg. On note A : « le joueur est un avant » et B : « le joueur pèse plus de 100 kg ».

	Pas plus de 100 kg	Plus de 100 kg	Total
Avants	?	15	21
Arrières	?	3	14
Total	?	?	35

1. Compléter le tableau croisé d'effectifs.
2. On choisit un joueur au hasard. Calculer la probabilité qu'il soit un avant, la probabilité qu'il pèse plus de 100 kg, puis la probabilité qu'il soit à la fois un avant et qu'il pèse plus de 100 kg.
3. Sachant que le joueur choisi est un avant, calculer la probabilité qu'il pèse plus de 100 kg. Puis, sachant qu'il pèse plus de 100 kg, calculer la probabilité qu'il soit un avant.
4. Les événements « le joueur est un avant » et « le joueur pèse plus de 100 kg » sont-ils indépendants ? Justifier de deux manières différentes.

Exercice 3 — Arbre pondéré à compléter — *

On considère un arbre à deux niveaux associé à deux événements A et B avec $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}8$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}25$.

1. Compléter toutes les probabilités manquantes de l'arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que les événements A et B soient réalisés simultanément. Calculer ensuite la probabilité que A ne soit pas réalisé et que B le soit.
3. À l'aide de l'arbre, calculer la probabilité que l'événement B soit réalisé.
4. Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité que l'événement A soit réalisé.

Exercice 4 — Tableau croisé — chaudières et défaut — *

Une entreprise fabrique, en un mois, 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse. Parmi les chaudières à cheminée, 1% sont défectueuses ; parmi les chaudières à ventouse, 5% sont défectueuses. On note A : « chaudière à cheminée », B : « chaudière à ventouse » et D : « chaudière défectueuse ».

	D	$\overline{D}$	Total
A	?	?	900
B	?	?	600
Total	?	?	1500

1. Compléter le tableau d'effectifs.
2. On prélève une chaudière au hasard. Calculer la probabilité qu'elle soit à cheminée, la probabilité qu'elle soit à ventouse, puis la probabilité qu'elle soit défectueuse.
3. Sachant que la chaudière choisie est à cheminée, calculer la probabilité qu'elle soit défectueuse. Faire de même

pour une chaudière à ventouse. Puis, sachant que la chaudière choisie est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle soit à ventouse.

4. Les événements « la chaudière est à ventouse » et « la chaudière est défectueuse » sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 5 — Tableau croisé — deux défauts indépendants — *

Une usine étudie un lot de 10 000 pièces. 2% des pièces présentent le défaut A, 8% présentent le défaut B et 0,16% présentent simultanément les deux défauts.

	A	$\overline{A}$	Total
B	?	?	?
$\overline{B}$	?	?	?
Total	?	?	10 000

1. Compléter le tableau croisé d'effectifs en distinguant la présence ou l'absence des deux défauts.
2. On choisit une pièce au hasard. Calculer la probabilité qu'elle présente le défaut A, la probabilité qu'elle présente le défaut B, puis la probabilité qu'elle présente simultanément les deux défauts.
3. Sachant que la pièce présente le défaut A, calculer la probabilité qu'elle présente aussi le défaut B. Calculer ensuite la probabilité qu'elle présente le défaut A sachant qu'elle présente le défaut B.
4. Les événements « la pièce présente le défaut A » et « la pièce présente le défaut B » sont-ils indépendants ? Justifier de deux manières différentes.

**Exercice 6 — Tableau croisé — musique et danse — **

Dans une classe de 25 élèves, 15 s'intéressent à la musique, 8 à la danse et 3 aux deux activités. On note M : « l'élève s'intéresse à la musique » et D : « l'élève s'intéresse à la danse ».

	M	$\overline{M}$	Total
D	3	?	8
$\overline{D}$	?	?	?
Total	15	?	25

1. Compléter le tableau croisé d'effectifs.
2. On choisit un élève au hasard. Calculer la probabilité qu'il s'intéresse à la musique, la probabilité qu'il s'intéresse à la danse, puis la probabilité qu'il s'intéresse aux deux activités.
3. Sachant que l'élève choisi s'intéresse à la musique, calculer la probabilité qu'il s'intéresse aussi à la danse. Puis, sachant qu'il s'intéresse à la danse, calculer la probabilité qu'il s'intéresse aussi à la musique.
4. Les événements « l'élève s'intéresse à la musique » et « l'élève s'intéresse à la danse » sont-ils indépendants ? Justifier.

**Exercice 7 — Test médical : interpréter un résultat positif — **

Dans une population, 2% des personnes sont malades. Un test est positif chez 95% des malades et chez 4% des non-malades. On note M : « malade » et T : « test positif ».

1. Calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit malade et obtienne un test positif.
2. Calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard obtienne un test positif.
3. Sachant que le test d'une personne est positif, calculer la probabilité que cette personne soit malade. Donner une valeur exacte puis une valeur approchée.
4. Sachant que le test d'une personne est négatif, calculer la probabilité que cette personne soit malgré tout malade. Interpréter le résultat dans le contexte du dépistage.

Exercice 8 — Jeu de 32 cartes et indépendance — **

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On note A : « tirer un as » et R : « tirer une carte rouge ».

1. Calculer la probabilité de tirer un as, puis celle de tirer une carte rouge.
2. Calculer la probabilité de tirer un as rouge.
3. Les événements « tirer un as » et « tirer une carte rouge » sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Calculer la probabilité de tirer une carte rouge qui ne soit pas un as. Puis, sachant que la carte tirée est rouge, calculer la probabilité qu'elle ne soit pas un as.

Exercice 9 — Sport collectif dans un lycée — **

Dans un établissement, 55% des élèves sont des filles. Parmi les filles, 40% pratiquent un sport collectif ; parmi les garçons, 30% en pratiquent un. On note F l'événement « l'élève choisi est une fille » et S l'événement « l'élève choisi pratique un sport collectif ».

1. Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard soit une fille et pratique un sport collectif.
2. Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard pratique un sport collectif.
3. Les événements « l'élève est une fille » et « l'élève pratique un sport collectif » sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Sachant qu'un élève pratique un sport collectif, calculer la probabilité qu'il s'agisse d'une fille. Interpréter le résultat.

Exercice 10 — Paramètre manquant dans un arbre — **

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}4$, $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}5$. On pose $p = P_A(B)$.

1. Exprimer, en fonction de p, la probabilité que l'événement B soit réalisé.
2. À l'aide de la valeur donnée dans l'énoncé pour la probabilité de B, déterminer p.
3. Calculer la probabilité que A et B soient réalisés simultanément. Puis, sachant que B est réalisé, calculer la probabilité que A soit réalisé.
4. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 11 — Trois lignes de production — ***

Une usine possède trois lignes L_1, L_2, L_3 produisant respectivement 20%, 30% et 50% des pièces. Leurs taux de défaut sont 1%, 2% et 4%. On note D : « la pièce est défectueuse ».

1. Pour chacune des trois lignes de production, calculer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard provienne de cette ligne et soit défectueuse.
2. En déduire la probabilité qu'une pièce choisie au hasard soit défectueuse.
3. Sachant qu'une pièce est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle provienne de la ligne L_3.
4. Sachant qu'une pièce n'est pas défectueuse, calculer la probabilité qu'elle provienne de la ligne L_1.

Exercice 12 — Deux tirages sans remise — ***

Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules bleues. On effectue deux tirages successifs sans remise. On note R_1 : « le premier tirage est rouge » et R_2 : « le second tirage est rouge ».

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage. Sachant que la première boule tirée est rouge, calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au second tirage.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges successivement.
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit rouge.
4. Les événements « obtenir une boule rouge au premier tirage » et « obtenir une boule rouge au second tirage » sont-ils indépendants ? Justifier. Puis, sachant que la seconde boule est rouge, calculer la probabilité que la première boule ait été rouge.

Exercice 13 — Deux tirages avec remise — ***

On reprend une urne contenant 4 boules rouges et 3 boules bleues, mais la première boule est remise dans l'urne avant le second tirage. On garde les événements R_1 et R_2.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage, puis la probabilité d'obtenir une boule rouge au second tirage.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges successivement.
3. Les événements « obtenir une boule rouge au premier tirage » et « obtenir une boule rouge au second tirage » sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Sachant que la première boule tirée est rouge, calculer la probabilité que la seconde le soit aussi. Comparer ce résultat avec celui obtenu dans l'exercice précédent, où les tirages étaient effectués sans remise.

Exercice 14 — Fiabilité de deux composants indépendants — ***

Deux composants, notés A et B, peuvent tomber en panne. On note A l'événement « le composant A tombe en panne » et B l'événement « le composant B tombe en panne ». On a $P(A) = 0{,}02$ et $P(B) = 0{,}03$, et les deux événements sont indépendants. Le système tombe en panne dès qu'au moins un des deux composants tombe en panne.

1. Calculer la probabilité qu'aucun des deux composants ne tombe en panne.
2. En déduire la probabilité que le système tombe en panne.
3. Calculer la probabilité qu'un seul des deux composants tombe en panne.
4. Sachant que le système est en panne, calculer la probabilité que les deux composants soient en panne simultanément.

Exercice 15 — Filtre anti-spam — ***

Parmi les courriels reçus, 18% sont des spams. Le filtre place en quarantaine 92% des spams et 7% des courriels légitimes. On note S : « spam » et Q : « mis en quarantaine ».

1. Calculer la probabilité qu'un courriel choisi au hasard soit un spam et soit placé en quarantaine.
2. Calculer la probabilité qu'un courriel choisi au hasard soit placé en quarantaine.
3. Sachant qu'un courriel est placé en quarantaine, calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un spam.
4. Sachant qu'un courriel est placé en quarantaine, calculer la probabilité qu'il soit légitime. Les événements « le courriel est un spam » et « le courriel est placé en quarantaine » sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 16 — Paramètre imposant l'indépendance — ***

On considère $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}6$ et $P_{\overline{A}}(B) = p$, où $p \in [0;1]$.

1. Exprimer, en fonction de p, la probabilité que l'événement B soit réalisé.
2. Déterminer la valeur de p pour laquelle les événements A et B sont indépendants.
3. Pour cette valeur de p, calculer la probabilité que A et B soient réalisés simultanément.
4. Vérifier le résultat de la question 2 en comparant la probabilité que A et B soient réalisés simultanément au produit de leurs probabilités respectives.

Exercice 17 — Indépendance et événements contraires — ***

On suppose que A et B sont indépendants, avec $P(A) = 0{,}4$ et $P(B) = 0{,}3$.

1. Calculer la probabilité que les événements A et B soient réalisés simultanément.
2. Calculer la probabilité que A soit réalisé et que B ne le soit pas.
3. Les événements A et « B n'est pas réalisé » sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Calculer la probabilité que ni A ni B ne soient réalisés. En déduire que les événements contraires de A et de B sont indépendants.

Exercice 18 — Union donnée et indépendance cachée — *

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}55$, $P(B) = 0{,}40$ et $P(A \cup B) = 0{,}73$.

1. À partir des données de l'énoncé, calculer la probabilité que les événements A et B soient réalisés simultanément.
2. Sachant que l'événement A est réalisé, calculer la probabilité que l'événement B soit réalisé.
3. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Déterminer les probabilités des quatre situations suivantes : les deux événements sont réalisés ; seul A est réalisé ; seul B est réalisé ; aucun des deux n'est réalisé.

Exercice 19 — Trois clients indépendants — *

Trois clients effectuent, indépendamment les uns des autres, un achat avec la probabilité 0,3. On note E l'événement « exactement un client effectue un achat », U l'événement « au moins un client effectue un achat » et C_1 l'événement « le premier client effectue un achat ».

1. Représenter les trois décisions d'achat par un arbre pondéré. En déduire la probabilité qu'exactement un seul des trois clients effectue un achat.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des trois clients effectue un achat.
3. Sachant qu'au moins un client a effectué un achat, calculer la probabilité qu'exactement un seul client ait effectué un achat.
4. Les événements « le premier client effectue un achat » et « exactement un seul des trois clients effectue un achat » sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 20 — Deux tests après une cause cachée — *

Une maladie touche 10% d'une population. On réalise deux tests. Chez une personne malade, chacun des deux tests est positif avec la probabilité 0,9, et leurs résultats sont indépendants. Chez une personne non malade, chacun est positif avec la probabilité 0,2, et leurs résultats sont également indépendants. On note M l'événement « la personne est malade » et D l'événement « les deux tests sont positifs ».

1. Sachant qu'une personne est malade, calculer la probabilité que ses deux tests soient positifs.
2. Sachant qu'une personne n'est pas malade, calculer la probabilité que ses deux tests soient positifs.
3. Calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard obtienne deux tests positifs.
4. Sachant qu'une personne a obtenu deux tests positifs, calculer la probabilité qu'elle soit malade.

Exercice 21 — Recrutement — dossier et décision finale — **

Une entreprise étudie les candidatures en deux étapes. 35% des candidats présentent un dossier jugé solide. Parmi eux, 68% sont recrutés. Parmi les autres candidats, 18% sont recrutés. On note B : « le dossier est jugé solide » et R : « le candidat est recruté ».

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation et compléter toutes ses branches.
2. Calculer la probabilité qu'un candidat ait un dossier qui n'est pas jugé solide et qu'il ne soit pas recruté.
3. Calculer la probabilité qu'un candidat choisi au hasard soit recruté.
4. Sachant qu'un candidat a été recruté, calculer la probabilité que son dossier ait été jugé solide. Interpréter le résultat.

Exercice 22 — Péage — retrouver une branche inconnue — **

À une gare de péage, 28% des automobilistes empruntent la voie de gauche G, 52% la voie centrale C et les autres la voie de droite D. Tous les automobilistes de la voie G passent en moins de 10 secondes. Sur la voie C, cette proportion est de 75%. Globalement, 70% des automobilistes passent en moins de 10 secondes. On note T cet événement.

1. Calculer la proportion d'automobilistes qui empruntent la voie de droite. Calculer ensuite la probabilité qu'un automobiliste emprunte la voie de gauche et franchisse le péage en moins de 10 secondes, puis la probabilité qu'il emprunte la voie centrale et franchisse le péage en moins de 10 secondes.
2. En utilisant le fait que 70% des automobilistes franchissent le péage en moins de 10 secondes, calculer la

probabilité qu'un automobiliste emprunte la voie de droite et franchisse le péage en moins de 10 secondes.

3. Sachant qu'un automobiliste emprunte la voie de droite, calculer la probabilité qu'il franchisse le péage en moins de 10 secondes.
4. Sachant qu'un automobiliste a franchi le péage en moins de 10 secondes, calculer la probabilité qu'il ait emprunté la voie de gauche.

Exercice 23 — Formation — taux de réussite à retrouver — ****

Dans une entreprise, 60% des salariés ont suivi une formation F. Parmi les salariés formés, 85% réussissent une certification R. Globalement, 73% des salariés réussissent cette certification.

1. Traduire les données de l'énoncé en probabilités, puis représenter la situation par un arbre pondéré partiellement complété.
2. Calculer la probabilité qu'un salarié choisi au hasard ait suivi la formation et réussisse la certification.
3. Sachant qu'un salarié n'a pas suivi la formation, calculer la probabilité qu'il réussisse la certification.
4. Sachant qu'un salarié a réussi la certification, calculer la probabilité qu'il ait suivi la formation. Interpréter le résultat.

Exercice 24 — Trois ateliers — origine d'une pièce défectueuse — ****

Une usine possède trois ateliers A, B et C qui fabriquent respectivement 25%, 45% et 30% des pièces. Les taux de défaut sont respectivement 2%, 4% et 7%. On note D : « la pièce est défectueuse ».

1. Pour chacun des trois ateliers, calculer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard provienne de cet atelier et soit défectueuse.
2. En déduire la probabilité qu'une pièce choisie au hasard soit défectueuse.
3. Sachant qu'une pièce est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'atelier C.
4. Sachant qu'une pièce n'est pas défectueuse, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'atelier A.

Exercice 25 — Dépistage — valeur prédictive d'un test — ****

Dans une population, 3% des personnes sont atteintes d'une maladie. Un test est positif chez 96% des personnes malades et également positif chez 5% des personnes non malades. On note M : « malade » et T : « test positif ».

1. Calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard obtienne un test positif.
2. Sachant que le test d'une personne est positif, calculer la probabilité que cette personne soit malade. Arrondir le résultat au millième.
3. Sachant que le test d'une personne est négatif, calculer la probabilité que cette personne soit malgré tout malade. Arrondir le résultat au dix-millième.
4. Comparer la probabilité qu'une personne soit malade avant de connaître le résultat du test, après un test positif et après un test négatif. Interpréter ces résultats.

Exercice 26 — Assurance — accident et profil du conducteur — ****

Une compagnie d'assurance estime que 28% de ses assurés sont de nouveaux conducteurs. Sur une année, 12% des nouveaux conducteurs déclarent au moins un accident, contre 3,5% des autres conducteurs. On note N : « nouveau conducteur » et A : « au moins un accident déclaré ».

1. Calculer la probabilité qu'un assuré choisi au hasard déclare au moins un accident au cours de l'année.
2. Sachant qu'un assuré a déclaré au moins un accident, calculer la probabilité qu'il soit un nouveau conducteur.
3. Les événements « l'assuré est un nouveau conducteur » et « l'assuré déclare au moins un accident » sont-ils indépendants ? Justifier de deux manières différentes.
4. Comparer le risque d'accident d'un nouveau conducteur à celui d'un autre conducteur en calculant le rapport entre les deux probabilités. Interpréter le résultat.

Exercice 27 — Indépendance — déterminer une branche paramétrée — **

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}4$, $P_A(B) = 0{,}7$ et $P_{\overline{A}}(B) = p$, où $p \in [0;1]$.

1. Exprimer, en fonction de p, la probabilité que l'événement B soit réalisé.
2. Déterminer la valeur de p pour laquelle les événements A et B sont indépendants.
3. Pour cette valeur de p, calculer la probabilité que A et B soient réalisés simultanément. Vérifier ensuite que, sachant que A est réalisé, la probabilité que B soit réalisé est égale à la probabilité de B.
4. Pour cette même valeur de p, comparer la probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé et la probabilité que B soit réalisé sachant que A ne l'est pas. Interpréter le résultat.

Exercice 28 — Commerce en ligne — annulation et support utilisé — **

Sur un site marchand, 68% des commandes sont passées depuis un smartphone S, les autres depuis un ordinateur. Parmi les commandes sur smartphone, 8% sont annulées ; parmi celles sur ordinateur, 5% sont annulées. On note A : « commande annulée ».

1. Calculer la probabilité qu'une commande choisie au hasard soit annulée.
2. Sachant qu'une commande est annulée, calculer la probabilité qu'elle ait été passée depuis un smartphone.
3. Sachant qu'une commande n'est pas annulée, calculer la probabilité qu'elle ait été passée depuis un smartphone.
4. Un responsable affirme que plus de trois quarts des commandes annulées ont été passées depuis un smartphone. Vérifier cette affirmation. Les événements « la commande est passée depuis un smartphone » et « la commande est annulée » sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 29 — Deux urnes — retrouver la cause d'un tirage — **

On choisit d'abord une urne : U_1 avec la probabilité $\dfrac{2}{5}$ et U_2 avec la probabilité $\dfrac{3}{5}$. Dans U_1, la probabilité de tirer une boule rouge est $\dfrac{3}{5}$. Dans U_2, elle vaut $\dfrac{1}{4}$. On choisit ensuite une boule au hasard dans l'urne sélectionnée. On note R : « la boule tirée est rouge ».

1. Construire l'arbre pondéré correspondant au choix de l'urne puis au tirage d'une boule. En déduire la probabilité d'obtenir une boule rouge, sous forme exacte.
2. Sachant que la boule tirée est rouge, calculer la probabilité que l'urne choisie ait été U_1.
3. Sachant que la boule tirée n'est pas rouge, calculer la probabilité que l'urne choisie ait été U_2.
4. Les événements « l'urne choisie est U_1 » et « la boule tirée est rouge » sont-ils indépendants ? Justifier. Interpréter ensuite le résultat obtenu à la question 2.

Exercice 30 — Contrôle qualité — synthèse complète type Bac — **

Une entreprise fabrique un composant dans deux ateliers. L'atelier A réalise 62% de la production et l'atelier B le reste. On note D : « le composant est défectueux ». On sait que $P_A(D) = 0{,}025$ et que, globalement, $P(D) = 0{,}04$.

1. On note p le taux de défaut de l'atelier B. À l'aide du taux global de composants défectueux, déterminer p.
2. Sachant qu'un composant est défectueux, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier B.
3. Sachant qu'un composant n'est pas défectueux, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier A.
4. L'atelier B réduit son taux de défaut de 20%, toutes les autres données restant inchangées. Calculer le nouveau taux global de composants défectueux.