

Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 1 — Conditionnelle, intersection et complément

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0,4$ et $P_A(B) = 0,35$. On sait en plus que $P(B) = 0,5$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.
2. Calculer $P_A(\overline{B})$.
3. Calculer $P(A \cap \overline{B})$.
4. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 2 — Effectifs et probabilités conditionnelles

Dans un lycée de 500 élèves, 300 sont des filles, 170 pratiquent le théâtre et 120 sont à la fois des filles et des élèves pratiquant le théâtre. On note F : « être une fille » et T : « pratiquer le théâtre ».

1. Calculer $P(F \cap T)$.
2. Calculer $P_F(T)$ puis $P_T(F)$.
3. Calculer $P(F \cup T)$.
4. Les événements F et T sont-ils indépendants ?

Exercice 3 — Arbre pondéré à compléter

On considère un arbre à deux niveaux associé à deux événements A et B avec $P(A) = 0,3$, $P_A(B) = 0,8$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0,25$.

1. Donner $P(\overline{A})$, $P_A(\overline{B})$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.
2. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$.
3. En déduire $P(B)$.
4. Calculer $P_B(A)$.

Exercice 4 — Deux machines et défaut de fabrication

Une pièce provient de la machine M_1 avec probabilité 0,6 et de M_2 avec probabilité 0,4. Le taux de défaut est de 2% pour M_1 et de 5% pour M_2 . On note D : « la pièce est défectueuse ».

1. Calculer $P(M_1 \cap D)$ et $P(M_2 \cap D)$.
2. Calculer $P(D)$.
3. Sachant que la pièce est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle provienne de M_2 .
4. Les événements M_1 et D sont-ils indépendants ?

Exercice 5 — Indépendance avec probabilités exactes

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$.

1. Montrer que A et B sont indépendants.
2. Calculer $P_A(B)$.
3. Calculer $P(\overline{A} \cap B)$.
4. Calculer $P(A \cup B)$.

Exercice 6 — Deux conditionnements inverses

On sait que $P(A) = 0,45$, $P(B) = 0,38$ et $P(A \cap B) = 0,27$.

1. Calculer $P_A(B)$.
2. Calculer $P_B(A)$.
3. Calculer $P(\overline{A} \cap B)$.
4. Calculer $P_B(\overline{A})$ et vérifier que les deux probabilités conditionnelles sachant B ont pour somme 1.

Exercice 7 — Test médical : interpréter un résultat positif

Dans une population, 2% des personnes sont malades. Un test est positif chez 95% des malades et chez 4% des non-malades. On note M : « malade » et T : « test positif ».

1. Calculer $P(M \cap T)$.
2. Calculer $P(T)$.
3. Calculer $P_T(M)$ sous forme exacte puis approchée.
4. Calculer $P_{\overline{T}}(M)$ et interpréter le résultat.

Exercice 8 — Jeu de 32 cartes et indépendance

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On note A : « tirer un as » et R : « tirer une carte rouge ».

1. Calculer $P(A)$ et $P(R)$.
2. Calculer $P(A \cap R)$.

3. Montrer que A et R sont indépendants.
4. Calculer $P(\bar{A} \cap R)$ puis $P_R(\bar{A})$.

Exercice 9 — Sport collectif dans un lycée

Dans un établissement, 55% des élèves sont des filles. Parmi les filles, 40% pratiquent un sport collectif ; parmi les autres élèves, 30% en pratiquent un. On note F et S les événements correspondants.

1. Calculer $P(F \cap S)$.
2. Calculer $P(S)$.
3. Les événements F et S sont-ils indépendants ?
4. Calculer $P_S(F)$ et interpréter.

Exercice 10 — Paramètre manquant dans un arbre

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0,4$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,3$ et $P(B) = 0,5$. On pose $p = P_A(B)$.

1. Exprimer $P(B)$ en fonction de p .
2. Déterminer p .
3. Calculer $P(A \cap B)$ puis $P_B(A)$.
4. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 11 — Trois lignes de production

Une usine possède trois lignes L_1, L_2, L_3 produisant respectivement 20%, 30% et 50% des pièces. Leurs taux de défaut sont 1%, 2% et 4%. On note D : « la pièce est défectueuse ».

1. Calculer les trois probabilités $P(L_i \cap D)$.
2. Calculer $P(D)$.
3. Sachant qu'une pièce est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle provienne de L_3 .
4. Sachant qu'une pièce n'est pas défectueuse, calculer la probabilité qu'elle provienne de L_1 .

Exercice 12 — Deux tirages sans remise

Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules bleues. On effectue deux tirages successifs sans remise. On note R_1 : « le premier tirage est rouge » et R_2 : « le second tirage est rouge ».

1. Calculer $P(R_1)$ et $P_{R_1}(R_2)$.
2. Calculer $P(R_1 \cap R_2)$.
3. Calculer $P(R_2)$ par la formule des probabilités totales.
4. Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ? Calculer aussi $P_{R_2}(R_1)$.

Exercice 13 — Deux tirages avec remise

On reprend une urne contenant 4 boules rouges et 3 boules bleues, mais la première boule est remise dans l'urne avant le second tirage. On garde les événements R_1 et R_2 .

1. Calculer $P(R_1)$ et $P(R_2)$.
2. Calculer $P(R_1 \cap R_2)$.
3. Montrer que R_1 et R_2 sont indépendants.
4. Calculer $P_{R_1}(R_2)$ et expliquer la différence avec l'exercice sans remise.

Exercice 14 — Fiabilité de deux composants indépendants

Deux composants A et B tombent en panne avec les probabilités respectives 0,02 et 0,03. On suppose les pannes indépendantes. Le système tombe en panne dès qu'au moins un composant tombe en panne.

1. Calculer la probabilité qu'aucun composant ne tombe en panne.
2. En déduire la probabilité que le système tombe en panne.
3. Calculer la probabilité qu'exactement un composant tombe en panne.
4. Sachant que le système est en panne, calculer la probabilité que les deux composants soient simultanément en panne.

Exercice 15 — Filtre anti-spam

Parmi les courriels reçus, 18% sont des spams. Le filtre place en quarantaine 92% des spams et 7% des courriels légitimes. On note S : « spam » et Q : « mis en quarantaine ».

1. Calculer $P(S \cap Q)$.
2. Calculer $P(Q)$.
3. Calculer la probabilité qu'un message mis en quarantaine soit réellement un spam.
4. Calculer la probabilité qu'un message mis en quarantaine soit légitime et dire si S et Q sont indépendants.

Exercice 16 — Paramètre imposant l'indépendance

On considère $P(A) = 0,3$, $P_A(B) = 0,6$ et $P_{\bar{A}}(B) = p$, où $p \in [0; 1]$.

1. Exprimer $P(B)$ en fonction de p .
2. Déterminer p pour que A et B soient indépendants.
3. Pour cette valeur de p , calculer $P(A \cap B)$.
4. Vérifier l'indépendance à l'aide de l'égalité $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Exercice 17 — Indépendance et événements contraires

On suppose que A et B sont indépendants, avec $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,3$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.
2. Calculer $P(A \cap \overline{B})$.
3. Montrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.
4. Calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ et montrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 18 — Union donnée et indépendance cachée

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0,55$, $P(B) = 0,40$ et $P(A \cup B) = 0,73$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.
2. Calculer $P_A(B)$.
3. Montrer que A et B sont indépendants.
4. Déterminer les quatre probabilités $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exercice 19 — Trois clients indépendants

Trois clients effectuent indépendamment un achat avec la probabilité 0,3. On note E : « exactement un client achète » et U : « au moins un client achète ».

1. Calculer $P(E)$.
2. Calculer $P(U)$.
3. Calculer $P_U(E)$.
4. On note C_1 : « le premier client achète ». Les événements C_1 et E sont-ils indépendants ?

Exercice 20 — Deux tests après une cause cachée

Une maladie touche 10% d'une population. On réalise deux tests. Chez une personne malade, chacun est positif avec probabilité 0,9 et les deux résultats sont indépendants ; chez une personne non malade, chacun est positif avec probabilité 0,2 et les deux résultats sont également indépendants. On note D : « les deux tests sont positifs ».

1. Calculer $P_M(D)$.
2. Calculer $P_{\overline{M}}(D)$.
3. Calculer $P(D)$.
4. Calculer $P_D(M)$.

Exercice 21 — Recrutement — dossier et décision finale

Une entreprise étudie les candidatures en deux étapes. 35% des candidats présentent un dossier jugé solide. Parmi eux, 68% sont recrutés. Parmi les autres candidats, 18% sont recrutés. On note B : « le dossier est jugé solide » et R : « le candidat est recruté ».

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation et compléter toutes les branches.
2. Calculer la probabilité qu'un candidat ait un dossier non jugé solide et ne soit pas recruté.
3. Calculer $P(R)$.
4. Un candidat a été recruté. Calculer $P_R(B)$ et interpréter le résultat.

Exercice 22 — Péage — retrouver une branche inconnue

À une gare de péage, 28% des automobilistes empruntent la voie de gauche G , 52% la voie centrale C et les autres la voie de droite D . Tous les automobilistes de la voie G passent en moins de 10 secondes. Sur la voie C , cette proportion est de 75%. Globalement, 70% des automobilistes passent en moins de 10 secondes. On note T cet événement.

1. Déterminer $P(D)$ puis calculer $P(G \cap T)$ et $P(C \cap T)$.
2. Justifier que $P(D \cap T) = 0,03$.
3. En déduire $P_D(T)$.
4. Sachant qu'un automobiliste a franchi le péage en moins de 10 secondes, calculer la probabilité qu'il ait emprunté la voie de gauche.

Exercice 23 — Formation — taux de réussite à retrouver

Dans une entreprise, 60% des salariés ont suivi une formation F . Parmi les salariés formés, 85% réussissent une certification R . Globalement, 73% des salariés réussissent cette certification.

1. Donner $P(F)$, $P_F(R)$ et $P(R)$, puis représenter la situation par un arbre partiellement complété.
2. Calculer $P(F \cap R)$.

3. Déterminer $P_{\overline{F}}(R)$.
4. Calculer $P_R(F)$ et interpréter cette probabilité.

Exercice 24 — Trois ateliers — origine d'une pièce défectueuse

Une usine possède trois ateliers A , B et C qui fabriquent respectivement 25%, 45% et 30% des pièces. Les taux de défaut sont respectivement 2%, 4% et 7%. On note D : « la pièce est défectueuse ».

1. Calculer $P(A \cap D)$, $P(B \cap D)$ et $P(C \cap D)$.
2. En déduire $P(D)$.
3. Sachant qu'une pièce est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'atelier C .
4. Sachant qu'une pièce n'est pas défectueuse, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'atelier A .

Exercice 25 — Dépistage — valeur prédictive d'un test

Dans une population, 3% des personnes sont atteintes d'une maladie. Un test est positif chez 96% des personnes malades et également positif chez 5% des personnes non malades. On note M : « malade » et T : « test positif ».

1. Calculer $P(T)$.
2. Calculer $P_T(M)$ et donner un arrondi au millièème.
3. Calculer $P_{\overline{T}}(M)$ et donner un arrondi au dix-millièème.
4. Comparer $P(M)$, $P_T(M)$ et $P_{\overline{T}}(M)$, puis interpréter l'information apportée par le test.

Exercice 26 — Assurance — accident et profil du conducteur

Une compagnie d'assurance estime que 28% de ses assurés sont de nouveaux conducteurs. Sur une année, 12% des nouveaux conducteurs déclarent au moins un accident, contre 3,5% des autres conducteurs. On note N : « nouveau conducteur » et A : « au moins un accident déclaré ».

1. Calculer $P(A)$.
2. Un assuré a déclaré un accident. Calculer $P_A(N)$.
3. Les événements N et A sont-ils indépendants ? Justifier de deux façons.
4. Comparer les risques d'accident des nouveaux conducteurs et des autres conducteurs à l'aide d'un rapport.

Exercice 27 — Indépendance — déterminer une branche paramétrée

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,7$ et $P_{\overline{A}}(B) = p$, où $p \in [0; 1]$.

1. Exprimer $P(B)$ en fonction de p .
2. Déterminer la valeur de p pour laquelle A et B sont indépendants.
3. Pour cette valeur, calculer $P(A \cap B)$ et vérifier $P_A(B) = P(B)$.
4. Montrer alors que $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$ et interpréter cette égalité.

Exercice 28 — Commerce en ligne — annulation et support utilisé

Sur un site marchand, 68% des commandes sont passées depuis un smartphone S , les autres depuis un ordinateur. Parmi les commandes sur smartphone, 8% sont annulées ; parmi celles sur ordinateur, 5% sont annulées. On note A : « commande annulée ».

1. Calculer $P(A)$.
2. Une commande a été annulée. Calculer $P_A(S)$.
3. Une commande n'a pas été annulée. Calculer $P_{\overline{A}}(S)$.
4. Un responsable affirme : « plus de trois quarts des commandes annulées ont été passées depuis un smartphone ». Vérifier cette affirmation et dire si S et A sont indépendants.

Exercice 29 — Deux urnes — retrouver la cause d'un tirage

On choisit d'abord une urne : U_1 avec la probabilité $\frac{2}{5}$ et U_2 avec la probabilité $\frac{3}{5}$. Dans U_1 , la probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{3}{5}$. Dans U_2 , elle vaut $\frac{1}{4}$. On choisit ensuite une boule au hasard dans l'urne sélectionnée. On note R : « la boule tirée est rouge ».

1. Construire l'arbre pondéré et calculer $P(R)$ sous forme exacte.
2. Sachant que la boule est rouge, calculer $P_R(U_1)$.
3. Sachant que la boule n'est pas rouge, calculer $P_{\overline{R}}(U_2)$.
4. Les événements U_1 et R sont-ils indépendants ? Interpréter la comparaison entre $P_R(U_1)$ et $P(U_1)$.

Exercice 30 — Contrôle qualité — synthèse complète type Bac

Une entreprise fabrique un composant dans deux ateliers. L'atelier A réalise 62% de la production et l'atelier B le reste. On note D : « le composant est défectueux ». On sait que $P_A(D) = 0,025$ et que, globalement, $P(D) = 0,04$.

1. En posant $p = P_B(D)$, déterminer p .
2. Un composant est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier B .

3. Un composant n'est pas défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier A .
4. L'atelier B réduit son taux de défaut de 20%, les autres données restant inchangées. Déterminer le nouveau taux global de composants défectueux.