

Polynômes du second degré

1ère Spécialité Mathématiques

30 exercices – répartition 5/5/10/10 – graphiques, inéquations, bicarrées et changements de variable

Exercice 1 - Choisir la forme la plus adaptée

Consigne. On considère :

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad g(x) = 2(x - 4)^2 - 7, \quad h(x) = -3(x + 1)(x - 5).$$

1. Préciser la forme de chacune des trois expressions : développée, canonique ou factorisée.
2. Lire directement les coefficients a, b, c de f .
3. Donner le sommet, l'axe de symétrie et le minimum de g .
4. Donner les racines de h , puis son signe sur $\mathbb{R}$.
5. Indiquer la forme la plus efficace pour résoudre $g(x) = -7$, puis $h(x) = 0$, et résoudre ces deux équations.

Exercice 2 - Discriminant et nombre de racines

Consigne. Calculer le discriminant puis préciser le nombre de racines réelles de chaque trinôme :

1. $x^2 - 8x + 7$
2. $2x^2 + 4x + 5$
3. $9x^2 - 12x + 4$
4. $-3x^2 + 5x + 2$
5. $5x^2 - 10x + 5$

Exercice 3 - Factoriser sans utiliser systématiquement le discriminant

Consigne. Factoriser sur $\mathbb{R}$ en choisissant la méthode la plus rapide :

1. $x^2 - 25$
2. $x^2 + 10x + 25$
3. $x^2 - 9x + 20$
4. $3x^2 - 12x$
5. $2x^2 - x - 6$
6. $4x^2 - 12x + 9$

Exercice 4 - Lire une forme canonique

Consigne. On considère $f(x) = -2(x - 3)^2 + 8$.

1. Donner le sommet et l'axe de symétrie.
2. Donner la valeur maximale de f .
3. Résoudre $f(x) = 8$.
4. Résoudre $f(x) = 0$.
5. Donner les variations de f sur $\mathbb{R}$.
6. Résoudre $f(x) \geq 0$.

Exercice 5 - Signe à partir d'une forme factorisée

Consigne. Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ des expressions suivantes :

1. $p(x) = (x + 2)(x - 5)$

2. $q(x) = -2(x - 1)(x + 4)$
3. $r(x) = 3(x - 2)^2$
4. $s(x) = -5(x + 2)^2$
5. En déduire les solutions de $p(x) \leq 0$ et de $q(x) \geq 0$.

Exercice 6 - Résoudre en choisissant la méthode la plus courte

Consigne. Résoudre dans $\mathbb{R}$, en indiquant la méthode choisie :

1. $x^2 - 11x + 24 = 0$
2. $3(x - 2)^2 = 12$
3. $2x^2 + x - 3 = 0$
4. $4x^2 + 4x + 5 = 0$
5. $x(x - 7) = 0$
6. $5(x + 1)^2 + 4 = 0$

Exercice 7 - Compléter le carré et étudier les variations

Consigne. Pour chaque fonction, écrire la forme canonique puis donner le sommet et les variations :

1. $f(x) = 2x^2 - 12x + 11$
2. $g(x) = -3x^2 - 6x + 2$
3. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$
4. $k(x) = -x^2 + 4x - 8$

Pour chacune, préciser aussi le nombre de racines réelles.

Exercice 8 - Somme et produit des racines – méthode de Viète

Consigne. Répondre sans utiliser systématiquement le discriminant :

1. Déterminer deux réels de somme 9 et de produit 20.
2. Déterminer deux réels de somme -2 et de produit -15 .
3. Construire le trinôme monique dont les racines sont -3 et 5 .
4. Résoudre $x^2 + 2x - 15 = 0$ en utilisant les questions précédentes.
5. Construire le trinôme monique dont les racines sont $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$.
6. Une racine de $3x^2 - 10x + 8$ est 2 . Trouver l'autre racine à l'aide du produit des racines.

Exercice 9 - Résoudre des inéquations du second degré

Consigne. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $x^2 - 5x + 6 \geq 0$
2. $-x^2 + 4x - 3 < 0$
3. $2x^2 - 8x + 6 \leq 0$
4. $x^2 + x + 1 > 0$
5. $(x - 2)(x + 5) \leq 0$
6. $(2x - 1)^2 > (x + 1)^2$

Exercice 10 - Reconstruire un trinôme à partir de ses racines et d'un point

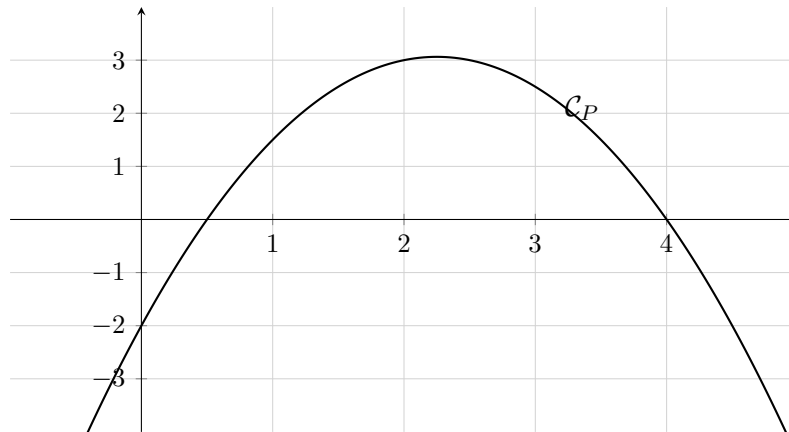
Consigne. Une fonction du second degré a pour racines -2 et 4 , et vérifie $f(0) = 16$.

1. Écrire $f(x) = a(x + 2)(x - 4)$.

2. Déterminer a .
3. Donner les formes factorisée et développée de f .
4. Donner le signe de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer le sommet de la parabole.
6. En déduire les variations de f .

Exercice 11 - Lecture graphique d'un trinôme – signes et coefficients

Consigne. On considère un trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$. Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.



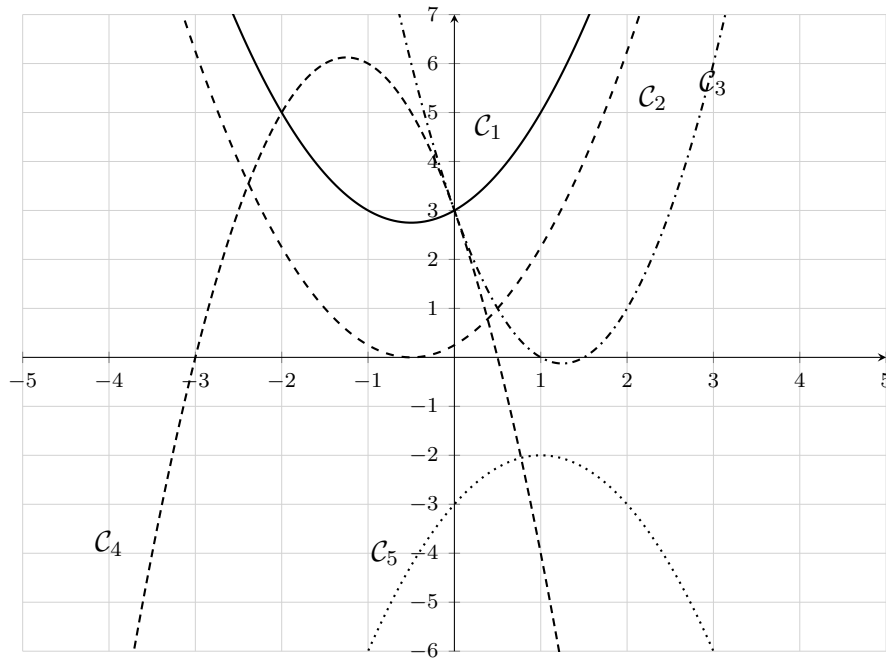
1. Déterminer le signe du coefficient a .
2. Déterminer le signe du coefficient b .
3. Déterminer le signe du coefficient c .
4. Déterminer le signe du discriminant Δ .
5. Déterminer le signe de $a + b + c$.
6. Combien P possède-t-il de racines réelles ? Quel est le signe de chacune d'elles ?
7. Déterminer le signe de $-\frac{b}{2a}$ et expliquer ce que représente ce nombre graphiquement.

Exercice 12 - Associer cinq paraboles à cinq fonctions

Consigne. On considère les cinq fonctions suivantes :

- a) $f_1(x) = -x^2 + 2x - 3$
- b) $f_2(x) = x^2 + x + 3$
- c) $f_3(x) = 2x^2 - 5x + 3$
- d) $f_4(x) = -2x^2 - 5x + 3$
- e) $f_5(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$

Le graphique ci-dessous représente cinq paraboles $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_5$.



1. Associer chaque courbe C_i à la fonction correspondante.
2. Pour chacune des cinq fonctions, déterminer graphiquement si son discriminant est positif, nul ou négatif.
3. Identifier la fonction dont la courbe est tangente à l'axe des abscisses.
4. Identifier les deux fonctions dont le coefficient dominant est négatif.
5. Parmi les fonctions de coefficient dominant positif, laquelle possède le minimum le plus petit ?
6. Justifier l'association de f_3 et f_5 sans développer ni calculer de discriminant.

Exercice 13 - Paramètre – discuter le nombre de racines

Consigne. On considère, pour $m \in \mathbb{R}$,

$$f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 5.$$

1. Calculer et factoriser $\Delta(m)$.
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f_m a deux racines réelles distinctes.
3. Déterminer le cas de racine double.
4. Déterminer le cas sans racine réelle.
5. Lorsque les racines existent, les exprimer en fonction de m .
6. Factoriser $f_1(x)$.

Exercice 14 - Paramètre – positivité sur tout $\mathbb{R}$

Consigne. Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit

$$p_m(x) = 2x^2 - 4mx + m + 3.$$

1. Calculer et factoriser le discriminant $\Delta(m)$.
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $p_m(x) > 0$ pour tout réel x .
3. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $p_m(x) \geq 0$ pour tout réel x .
4. Pour quelles valeurs de m le trinôme possède-t-il une racine double ? Donner cette racine.
5. Que peut-on dire du signe de p_m lorsque $m < -1$ ou $m > \frac{3}{2}$?

Exercice 15 - Inéquations avancées – produits et quotients

Consigne. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes. Pour les quotients, préciser d'abord les valeurs interdites.

1. $\frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 + x - 2} > 0$
2. $(2x - 1)^2 > (x + 1)^2$
3. $(x + 3)(x - 1) < 2x + 6$
4. $\frac{x + 3}{1 - x} \geq -5x + 3$
5. $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$
6. $\frac{-x^2 + 5x + 6}{x - 1} \geq 0$

Exercice 16 - Équations bicarrées ramenées au second degré

Consigne. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
2. $2x^4 - x^2 + 1 = 0$
3. $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
4. $4x^2 - 35 - \frac{9}{x^2} = 0$
5. $-2x^4 + 12x^2 - 16 = 0$
6. $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

Exercice 17 - Changements de variable – ramener au second degré

Consigne. Pour chaque équation, choisir un changement de variable adapté puis résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $(x^2 - x)^2 = 14(x^2 - x) - 24$
2. $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$
3. $(2x - 1)^4 - 5(2x - 1)^2 + 4 = 0$
4. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

Exercice 18 - Systèmes et relations somme-produit

Consigne. Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^2$.

1. $\begin{cases} x + y = 5, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -6. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 6. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

Exercice 19 - Approfondissement – factoriser un polynôme du troisième degré

Consigne. On considère $P(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$.

1. Vérifier que 4 est une racine de P .
2. Factoriser complètement P .
3. Résoudre $P(x) = 0$.
4. Résoudre $P(x) \geq 0$.
5. Donner le signe de P sur chacun des intervalles déterminés par ses racines.
6. Calculer la somme et le produit des trois racines.

Exercice 20 - Démonstration – signes, racines et produit ac

Consigne. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

1. Démontrer que si a et c sont de signes contraires, alors P possède deux racines réelles distinctes.
2. Démontrer que, dans ce cas, les deux racines sont de signes contraires.
3. Réciproquement, montrer que si P possède deux racines réelles de signes contraires, alors $ac < 0$.
4. En déduire l'équivalence : P possède deux racines réelles de signes contraires si et seulement si $ac < 0$.
5. Donner un contre-exemple montrant que « deux racines réelles distinctes » n'implique pas $ac < 0$.

Exercice 21 - Démonstration générale – retrouver la formule des racines

Consigne. On pose $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. À partir de l'équation $P(x) = 0$, retrouver les formules de résolution du second degré.

1. Multiplier l'équation par $4a$ et compléter le carré.
2. Montrer que l'équation est équivalente à $(2ax + b)^2 = \Delta$, où $\Delta = b^2 - 4ac$.
3. Traiter successivement les cas $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$.
4. En déduire l'expression de la forme canonique de $ax^2 + bx + c$.
5. Lorsque $\Delta \geq 0$, retrouver à partir des formules la somme et le produit des racines.

Exercice 22 - Tangence d'une droite à une parabole – paramètre

Consigne. On considère la parabole $\mathcal{P} : y = x^2 - 2x + 3$ et la famille de droites $d_m : y = mx + 1$.

1. Écrire l'équation des abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et d_m .
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles d_m est tangente à $\mathcal{P}$.
3. Pour chacune de ces valeurs, déterminer exactement le point de contact.
4. Écrire les deux droites tangentes obtenues.
5. Vérifier algébriquement que chaque point de contact appartient à la parabole.

Exercice 23 - Paramètre avec cas dégénéré – classification complète

Consigne. Pour $m \in \mathbb{R}$, on étudie l'équation

$$mx^2 - 2(m+1)x + m + 4 = 0.$$

1. Étudier séparément le cas $m = 0$.
2. Pour $m \neq 0$, calculer le discriminant.
3. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation possède exactement deux solutions réelles distinctes.
4. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles elle possède exactement une solution réelle.
5. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles elle n'a aucune solution réelle.

6. Donner la solution unique dans chacun des cas où elle existe.

Exercice 24 - Optimisation géométrique dans un triangle rectangle

Consigne. Dans un triangle rectangle OAB , on a $OA = 12$ et $OB = 8$. Un rectangle $OMPN$ est inscrit dans le triangle, avec $M \in [OA]$, $N \in [OB]$ et $P \in [AB]$. On pose $OM = x$, avec $0 \leq x \leq 12$.

- On choisit un repère orthonormé d'origine O , l'axe des abscisses porté par (OA) et l'axe des ordonnées par (OB) . Montrer que la droite (AB) a pour équation $y = 8 - \frac{2}{3}x$.
- En déduire l'aire du rectangle en fonction de x .
- Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale.
- Calculer l'aire maximale et le périmètre du rectangle correspondant.
- Résoudre $A(x) \geq 18$ et interpréter géométriquement.

Exercice 25 - Mise en équation – achat d'articles

Consigne. Une personne dépense exactement 240 € pour acheter des articles identiques. Si chaque article avait coûté 4 € de moins, elle aurait pu acheter 5 articles de plus avec la même somme.

- On note n le nombre d'articles achetés. Exprimer le prix d'un article.
- Traduire la seconde situation par une équation.
- Résoudre et interpréter.
- Préciser les contraintes sur n et vérifier numériquement la solution trouvée.
- Quel est alors le prix après réduction et combien d'articles peut-on acheter ?

Exercice 26 - Modélisation – deux trains perpendiculaires

Consigne. Deux trains quittent au même instant une gare, l'un vers le nord et l'autre vers l'est. Le train le plus rapide roule 20 km/h plus vite que l'autre. Après 3 heures, les deux trains sont distants de 300 km à vol d'oiseau.

- On note v la vitesse du train le plus lent. Écrire une équation grâce au théorème de Pythagore.
- Résoudre l'équation.
- Donner les deux vitesses.
- Quelle distance sépare les trains après 2 heures ?
- Au bout de combien de temps seront-ils distants de 500 km ?

Exercice 27 - Système symétrique avec des cubes

Consigne. On cherche les couples réels (x, y) vérifiant

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x^3 + y^3 = 28. \end{cases}$$

- Utiliser l'identité $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ pour déterminer xy .
- En déduire les couples (x, y) .
- Calculer $x^2 + y^2$ sans remplacer x et y par leurs valeurs.
- Calculer $x^2y + xy^2$.
- Vérifier les résultats sur chacun des deux couples solutions.

Exercice 28 - Algorithme de Héron et racine d'une équation du second degré

Consigne. On cherche une approximation de la racine positive de $x^2 - 7 = 0$. On définit $u_0 = 3$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{7}{u_n} \right).$$

1. Quelle est la racine positive exacte de $x^2 - 7 = 0$?
2. Calculer exactement u_1 et u_2 .
3. Donner u_1, u_2, u_3 à 10^{-6} près.
4. Comparer ces valeurs à $\sqrt{7}$ et commenter la convergence observée.
5. Montrer que, pour $u_n > 0$, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{2u_n}$. Expliquer pourquoi cette identité traduit une convergence rapide.

Exercice 29 - Paramètre – classifier les signes des deux racines

Consigne. Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère

$$x^2 - 2mx + m + 2 = 0.$$

1. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles il existe deux racines réelles distinctes.
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les deux racines sont strictement positives.
3. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les deux racines sont strictement négatives.
4. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les racines sont de signes contraires.
5. Étudier séparément les valeurs limites $m = -2, -1, 2$.

Exercice 30 - Synthèse – droite horizontale et écart entre les intersections

Consigne. On considère la parabole $\mathcal{P} : y = 2x^2 - 8x + 5$ et la droite horizontale $d_k : y = k$, où $k \in \mathbb{R}$.

1. Mettre l'équation de $\mathcal{P}$ sous forme canonique.
2. Selon k , déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{P}$ et d_k .
3. Lorsque les deux intersections existent, déterminer leurs abscisses exactes.
4. Déterminer k pour que la distance horizontale entre ces deux points soit égale à 3.
5. Montrer que, lorsque deux intersections existent, leur milieu a toujours pour abscisse 2.
6. Déterminer la valeur de k pour laquelle la droite est tangente à la parabole.