

Géométrie repérée — 30 exercices

Exercice 1 — Vecteur, milieu et distance

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2; 3)$ et $B(4; -1)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer les coordonnées du milieu M de $[AB]$.
3. Calculer la distance AB sous forme exacte.
4. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 2 — Alignement, milieu et droite

On considère $A(1; -1)$, $B(3; 2)$ et $C(5; 5)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les points A, B, C sont alignés.
3. Montrer que B est le milieu de $[AC]$.
4. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AC) .

Exercice 3 — Vecteur normal et vecteur directeur

On considère la droite $d : 2x - 3y + 6 = 0$.

1. Donner un vecteur normal à d .
2. Donner un vecteur directeur à d .
3. Vérifier que $A(0; 2)$ appartient à d .
4. Écrire d sous la forme $y = mx + p$.

Exercice 4 — Équation d'une droite à partir d'un normal

On cherche la droite d passant par $A(1; 2)$ et admettant $\vec{n} = (2; -1)$ comme vecteur normal.

1. Écrire une équation de d sous forme point-normal.
2. Réduire cette équation sous la forme $ax + by + c = 0$.
3. Vérifier que $B(3; 6)$ appartient à d .
4. Déterminer l'intersection de d avec l'axe des abscisses.

Exercice 5 — Cercle donné par son centre et son rayon

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $C(2; -1)$ et de rayon 3.

1. Écrire une équation de $\mathcal{C}$.
2. Vérifier que $A(5; -1)$ appartient au cercle.
3. Donner les extrémités du diamètre horizontal du cercle.
4. Déterminer les intersections de $\mathcal{C}$ avec la droite $x = 2$.

Exercice 6 — Droite parallèle passant par un point

On considère $d : 3x - 2y + 5 = 0$ et le point $A(-1; 4)$. On cherche la droite Δ parallèle à d passant par A .

1. Donner un vecteur normal commun à d et Δ .
2. Déterminer une équation cartésienne de Δ .
3. Vérifier que $B(1; 7)$ appartient à Δ .
4. Déterminer l'ordonnée du point où Δ coupe l'axe des ordonnées.

Exercice 7 — Droite perpendiculaire

On considère $d : x + 2y - 3 = 0$ et le point $P(4; -1)$.

1. Donner un vecteur directeur de d .
2. En déduire un vecteur normal à la droite Δ perpendiculaire à d .
3. Déterminer une équation de Δ passant par P .
4. Calculer les coordonnées du point $I = d \cap \Delta$.

Exercice 8 — Projeté orthogonal sur une droite simple

On considère la droite $d : x + y - 2 = 0$ et le point $P(3; 1)$.

1. Donner un vecteur normal à d .
2. Paramétrer la droite passant par P et perpendiculaire à d .
3. Déterminer le projeté orthogonal H de P sur d .
4. Calculer la distance PH .

Exercice 9 — Reconnaître une équation de cercle

On considère l'équation $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

1. Compléter les carrés en x et en y .
2. Reconnaître le cercle et donner son centre et son rayon.
3. Vérifier que $A(5; 1)$ appartient au cercle.
4. Déterminer les intersections du cercle avec l'axe des abscisses.

Exercice 10 — Cercle de diamètre donné

On considère $A(-1; 2)$ et $B(5; 4)$. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour diamètre $[AB]$.

1. Déterminer le centre M du cercle.
2. Calculer AB puis le rayon de $\mathcal{C}$.
3. Écrire une équation de $\mathcal{C}$.
4. Vérifier que $C(1; 0)$ appartient à $\mathcal{C}$.

Exercice 11 — Projection orthogonale complète

On considère $d : 2x - y + 1 = 0$ et $P(3; 4)$.

1. Donner un vecteur normal à d .
2. Écrire les coordonnées d'un point de la perpendiculaire à d passant par P sous la forme $H(3 + 2t; 4 - t)$.
3. Déterminer t , puis les coordonnées du projeté H .
4. Calculer la distance PH sous forme exacte.

Exercice 12 — Intersection cercle-droite verticale

On considère $\mathcal{C} : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 13$ et la droite $d : x = 3$.

1. Donner le centre et le rayon de $\mathcal{C}$.
2. Résoudre le système définissant $\mathcal{C} \cap d$.
3. Donner les coordonnées des deux points d'intersection.
4. Calculer la longueur de la corde découpée par d et son milieu.

Exercice 13 — Nombre d'intersections suivant un paramètre

On considère le cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 25$ et, pour un réel m , la droite $d_m : x = m$.

1. Réduire la recherche des intersections à une équation en y .
2. Discuter le nombre d'intersections selon m .
3. Lorsque $|m| < 5$, donner les coordonnées exactes des deux points.
4. Appliquer le résultat au cas $m = 3$.

Exercice 14 — Tangente à un cercle en un point

On considère le cercle $\mathcal{C} : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$ et le point $A(4; -1)$.

1. Vérifier que A appartient à $\mathcal{C}$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CA}$, où C est le centre.
3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A .
4. Déterminer les intersections de cette tangente avec les axes.

Exercice 15 — Cercle passant par trois points

On cherche le cercle passant par $A(0; 0)$, $B(4; 0)$ et $C(0; 6)$, sous la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

1. Utiliser le point A pour déterminer c .
2. Utiliser B et C pour déterminer a et b .
3. Mettre l'équation obtenue sous forme réduite et donner centre et rayon.
4. Vérifier que $D(4; 6)$ appartient également à ce cercle.

Exercice 16 — Tangence par projection orthogonale

On considère le cercle de centre $C(2; 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$, ainsi que la droite $d : x - 2y + 5 = 0$.

1. Donner un vecteur normal à d .
2. Déterminer le projeté orthogonal H de C sur d .
3. Calculer la distance CH .
4. En déduire la position relative de d et du cercle, puis préciser le point de contact.

Exercice 17 — Tangence d'une famille de droites

On considère le cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 4$ et les droites $d_p : y = x + p$, où $p \in \mathbb{R}$.

1. Écrire d_p sous forme cartésienne et donner un vecteur normal.
2. Déterminer le projeté orthogonal de l'origine O sur d_p .
3. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles d_p est tangente à $\mathcal{C}$.
4. Donner les points de tangence correspondants.

Exercice 18 — Médiatrice par équidistance

On considère $A(-2; 1)$, $B(4; 5)$ et un point variable $M(x; y)$.

1. Calculer $MA^2 - MB^2$ et réduire l'expression.
2. En déduire une équation de l'ensemble des points équidistants de A et B .
3. Vérifier que le milieu I de $[AB]$ appartient à cette droite.
4. Déterminer les intersections de cette médiatrice avec les axes.

Exercice 19 — Rectangle et cercle circonscrit

On considère $A(-1; 1)$, $B(5; 1)$, $C(5; 5)$ et $D(-1; 5)$.

1. Montrer que $ABCD$ est un rectangle.
2. Déterminer le milieu commun O des diagonales.
3. Calculer OA et en déduire le rayon du cercle circonscrit.
4. Écrire l'équation du cercle et vérifier qu'il contient les quatre sommets.

Exercice 20 — Hauteur, projeté et aire d'un triangle

On considère le triangle ABC avec $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ et $C(2; 4)$.

1. Déterminer une équation de la droite (BC) .
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de A .
3. Calculer les coordonnées du pied H de cette hauteur sur (BC) .
4. Calculer AH puis l'aire du triangle ABC .

Exercice 21 — Lieu équidistant d'un axe et d'un point

On cherche l'ensemble des points $M(x; y)$ équidistants de l'axe des abscisses et du point $F(0; 4)$.

1. Exprimer la distance de M à l'axe des abscisses et la distance MF .
2. Traduire l'équidistance par une équation puis la simplifier.
3. Mettre l'équation sous la forme $y = ax^2 + b$ et préciser sommet et axe de symétrie.
4. Déterminer les intersections de ce lieu avec la droite $y = 4$.

Exercice 22 — Parabole et droite horizontale avec paramètre

On considère la parabole $\mathcal{P} : y = x^2 - 4x + 1$ et la droite $d_k : y = k$.

1. Mettre l'équation de $\mathcal{P}$ sous forme canonique et donner son sommet.
2. Résoudre l'équation d'intersection de $\mathcal{P}$ et d_k .
3. Discuter le nombre de points d'intersection selon k .
4. Déterminer les points d'intersection pour $k = 1$.

Exercice 23 — Cercles tangents aux deux axes

On cherche les cercles situés dans le premier quadrant, tangents aux deux axes et passant par $A(3; 1)$. On note $r > 0$ leur rayon.

1. Justifier que leur centre a pour coordonnées $C(r; r)$.
2. Traduire l'appartenance de A au cercle par une équation en r .
3. Résoudre cette équation et donner les deux rayons possibles.
4. Écrire les deux équations de cercle correspondantes.

Exercice 24 — Cercle par deux points et centre contraint

Un cercle passe par $A(1; 1)$ et $B(5; 3)$. Son centre O appartient à la droite $y = x$.

1. Poser $O(t; t)$ et écrire la condition $OA = OB$.
2. Déterminer t et les coordonnées du centre.
3. Calculer r^2 et écrire l'équation du cercle.
4. Déterminer le second point d'intersection du cercle avec la droite $y = x$, autre que A .

Exercice 25 — Orthocentre par géométrie repérée

On considère $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ et $C(2; 4)$.

1. Déterminer une équation de (BC) .
2. Déterminer l'équation de la hauteur issue de A .

3. Déterminer l'équation de la hauteur issue de C .
4. En déduire l'orthocentre H et vérifier qu'il appartient aussi à la hauteur issue de B .

Exercice 26 — Centres remarquables et alignement

On considère le triangle rectangle ABC avec $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ et $C(0; 8)$.

1. Déterminer l'orthocentre H du triangle.
2. Déterminer le centre O du cercle circonscrit et son rayon.
3. Calculer les coordonnées du centre de gravité G .
4. Montrer que H, G, O sont alignés et déterminer le rapport HG/HO .

Exercice 27 — Tangentes issues d'un point extérieur

On considère le cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 9$ et le point extérieur $P(5; 0)$. Un point de tangence est noté $T(x; y)$.

1. Traduire les conditions $T \in \mathcal{C}$ et $OT \perp PT$.
2. Déterminer les coordonnées des deux points de tangence.
3. Déterminer les équations des deux tangentes issues de P .
4. Calculer la longueur commune des segments tangents.

Exercice 28 — Cercle tangent à un axe sous contrainte

On cherche les cercles tangents à l'axe des abscisses, dont le centre appartient à la droite $y = x + 1$, et qui passent par $A(4; 2)$. Le centre est au-dessus de l'axe.

1. Paramétrer le centre O et le rayon r à l'aide d'un réel a .
2. Traduire l'appartenance de A au cercle par une équation en a .
3. Résoudre cette équation et donner les deux centres et rayons possibles.
4. Donner les points de tangence avec l'axe des abscisses.

Exercice 29 — Corde d'un cercle et projection

On considère le cercle de centre $O(1; -1)$ et de rayon 5, ainsi que la droite $d : 3x + 4y + 16 = 0$.

1. Déterminer le projeté orthogonal H de O sur d .
2. Calculer la distance OH .
3. En déduire la longueur de la corde $[PQ]$ découpée par d sur le cercle.
4. Déterminer les coordonnées exactes des deux extrémités P, Q de la corde.

Exercice 30 — Synthèse - deux tangentes

On considère le cercle $\mathcal{C} : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$, les points $A(4; 3)$, $B(2; -1)$ et le point extérieur $P(5; 0)$.

1. Vérifier que A et B appartiennent à $\mathcal{C}$.
2. Montrer que les droites (PA) et (PB) sont tangentes au cercle respectivement en A et B .
3. Déterminer une équation cartésienne de chacune des deux tangentes.
4. Calculer PA , PB et l'aire du triangle PAB .