

Fonctions trigonométriques

Exercice 1 – Conversions et mesures principales

Facile

- Convertir en radians : 18° , 54° , 135° , 315° .
- Donner la mesure principale dans $] -\pi; \pi]$ de :

$$\frac{23\pi}{6}, \quad -\frac{17\pi}{4}, \quad \frac{35\pi}{3}, \quad -\frac{53\pi}{6}.$$

- Donner deux autres mesures de chacun des deux premiers angles, différant d'un multiple de 2π .
- Convertir en degrés : $-\frac{7\pi}{5}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{11\pi}{6}$.

Exercice 2 – Valeurs exactes sur le cercle

Facile

- Donner les coordonnées du point-image des angles $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{4}$.
- En déduire les valeurs exactes des sinus et cosinus correspondants.
- Pour chacun de ces angles, préciser le quadrant auquel appartient le point-image.
- Donner, dans $[0; 2\pi[$, un autre angle ayant le même cosinus que $\frac{\pi}{6}$, puis un autre angle ayant le même sinus que $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 3 – Réduction modulo 2π et signes

Facile

- Ramener dans $[0; 2\pi[$ les angles $-\frac{13\pi}{12}$, $\frac{23\pi}{6}$, $-\frac{17\pi}{3}$, $\frac{29\pi}{6}$.
- Sans calculatrice, déterminer le signe de leur sinus et de leur cosinus.
- Pour lesquels de ces angles sinus et cosinus ont-ils des signes contraires ?
- Pour lesquels le produit $\sin x \cos x$ est-il strictement positif ?

Exercice 4 – Angles associés : symétries et déphasages

Facile

- Simplifier : $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi + x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
- En déduire exactement : $\cos \frac{5\pi}{6}$, $\sin \frac{7\pi}{6}$, $\cos \frac{5\pi}{4}$, $\sin \frac{5\pi}{3}$.
- Justifier chaque signe à l'aide du cercle trigonométrique.
- Simplifier $\sin(-x) + \sin(\pi + x)$ et $\cos(-x) + \cos(\pi - x)$.

Exercice 5 – Retrouver sinus, cosinus et tangente

Facile

- On sait que $\cos x = -\frac{3}{5}$ et $x \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$. Déterminer $\sin x$ puis $\tan x$.
- On sait que $\sin y = \frac{5}{13}$ et $y \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$. Déterminer $\cos y$ puis $\tan y$.
- Vérifier dans chaque cas l'identité $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
- On sait que z est dans le quatrième quadrant et que $\tan z = -\frac{3}{4}$. Déterminer $\sin z$ et $\cos z$.

Exercice 6 – Tangente : domaine, valeurs et équation

Moyen

- Donner le domaine de définition de la fonction tangente.
- Calculer exactement $\tan \frac{\pi}{6}$, $\tan \frac{3\pi}{4}$ et $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

3. Résoudre $\tan x = -1$ dans $[-\pi; \pi]$.
4. Donner ensuite la solution générale dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7 – Identités trigonométriques : simplifier et prouver*Moyen*

1. Simplifier $A(x) = 1 - \sin^2 x$.
2. Pour $\sin x \neq 0$, simplifier $B(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x}$.
3. Développer $(\sin x + \cos x)^2$ et $(\sin x - \cos x)^2$.
4. En déduire l'identité

$$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2.$$

Exercice 8 – Parité et périodicité*Moyen*

1. Montrer que $f(x) = 2 - 3 \cos x$ est paire.
2. Montrer que f est 2π -périodique.
3. Montrer que $g(x) = \sin(2x)$ est impaire et π -périodique.
4. Montrer que $h(x) = \cos(4x)$ est paire et $\frac{\pi}{2}$ -périodique.

Exercice 9 – Équations trigonométriques fondamentales*Moyen*

1. Résoudre $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0; 2\pi[$.
2. Résoudre $\cos x = -\frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi[$.
3. Résoudre $\tan x = \sqrt{3}$ dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
4. Résoudre $\sin x = 0$ dans $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 10 – Dérivée et variations d'une fonction cosinus*Moyen*

On considère $f(x) = 2 \cos x - 1$ sur $[0; \pi]$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser les variations de f sur $[0; \pi]$.
3. Résoudre $f(x) = 0$ sur cet intervalle.
4. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0; \pi]$.

Exercice 11 – Étude complète de la fonction cosinus*Difficile*

1. Justifier que $\cos$ est paire et expliquer pourquoi l'étude sur $[0; \pi]$ suffit pour connaître les variations sur $[-\pi; \pi]$.
2. À l'aide de $(\cos x)' = -\sin x$, dresser le tableau de variations de $\cos$ sur $[-\pi; \pi]$.
3. Donner son maximum et son minimum sur cet intervalle.
4. Résoudre $\cos x \geq \frac{1}{2}$ dans $[-\pi; \pi]$.

Exercice 12 – Étude complète de la fonction sinus*Difficile*

1. Calculer la dérivée de $\sin x$.
2. Étudier le signe de $\cos x$ sur $[0; 2\pi]$.
3. Dresser les variations de $\sin$ sur $[0; 2\pi]$ et préciser les extrema.
4. Résoudre $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0; 2\pi]$.

Exercice 13 – Fonction $\sin x + \cos x$: variations et amplitude*Difficile*

On pose $f(x) = \sin x + \cos x$ sur $[0; 2\pi]$.

1. Calculer $f'(x)$ et résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0; 2\pi]$.
2. Dresser les variations de f et déterminer ses extrema.
3. Montrer que $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
4. Retrouver les extrema à partir de cette dernière écriture.

Exercice 14 – Fonction $1 + 2 \cos x$: zéros et signe*Difficile*

On considère $g(x) = 1 + 2 \cos x$ sur $[0; 2\pi]$.

1. Donner l'image de $[0; 2\pi]$ par g .
2. Résoudre $g(x) = 0$.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0; 2\pi]$.
4. Calculer $g'(x)$ et vérifier que les variations sont cohérentes avec le signe obtenu.

Exercice 15 – Fonction $\sin(2x)$: période et variations*Difficile*

On considère $h(x) = \sin(2x)$.

1. Montrer que π est une période de h .
2. Calculer $h'(x)$.
3. Dresser les variations de h sur $[0; \pi]$.
4. Résoudre $h(x) = 0$ sur $[0; \pi]$.

Exercice 16 – Équation composée : $\cos(2x) = \cos(\pi/3)$ *Difficile*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
2. En déduire toutes les solutions dans $[0; 2\pi[$.
3. Expliquer pourquoi le nombre de solutions obtenu est cohérent avec la période de $\cos(2x)$.
4. Résoudre la même équation dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 17 – Équation composée : $\sin(3x) = 1/2$ *Difficile*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(3x) = \frac{1}{2}$.
2. Déterminer toutes les solutions dans $[0; 2\pi[$.
3. Combien de solutions obtient-on et pourquoi ce nombre est-il cohérent avec la période de $\sin(3x)$?
4. Résoudre la même équation dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 18 – Identité par angles associés et équation*Difficile*

1. Montrer que, pour tout réel x ,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x = 1.$$

2. Simplifier séparément les deux produits de cette somme.
3. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x = \frac{3}{4}.$$

4. Montrer que la différence des deux produits vaut $\cos(2x)$, puis résoudre $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi[$.

Exercice 19 – Paramètre dans une équation cosinus*Difficile*

Pour un réel m , on étudie dans $[0; 2\pi[$ l'équation $2 \cos x = m$.

1. Pour quelles valeurs de m l'équation possède-t-elle au moins une solution ?
2. Pour quelles valeurs de m possède-t-elle exactement deux solutions ?
3. Pour quelles valeurs de m possède-t-elle exactement une solution ?
4. Résoudre exactement le cas $m = \sqrt{2}$.

Exercice 20 – Fonction $3 - 2 \sin x$: image, zéros et variations*Difficile*

On pose $p(x) = 3 - 2 \sin x$ sur $[0; 2\pi]$.

1. Déterminer l'image de $[0; 2\pi]$ par p .
2. Résoudre $p(x) = 2$.
3. Calculer $p'(x)$ et dresser les variations de p .
4. Montrer que $p(x)$ est strictement positive pour tout réel x .

Exercice 21 – Expression rationnelle : domaine, identité et équation*Très difficile*

On définit

$$F(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de F .
2. Montrer que, lorsque les deux membres sont définis,

$$F(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

3. Résoudre $F(x) = 1$ dans $[0; 2\pi[$.
4. Expliquer pourquoi une solution obtenue après transformation algébrique peut devoir être rejetée.

Exercice 22 – Combinaison linéaire : $3 \cos x + \sqrt{3} \sin x$ *Très difficile*

On considère $A(x) = 3 \cos x + \sqrt{3} \sin x$.

1. Montrer que

$$A(x) = 2\sqrt{3} \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right).$$

2. Déterminer le maximum et le minimum de A .
3. Résoudre $A(x) = 3$ dans $[0; 2\pi[$.
4. Résoudre $A(x) \geq 3$ dans $[0; 2\pi[$.

Exercice 23 – Paramètre : signe de $a + 2 \cos x$ *Très difficile*

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a(x) = a + 2 \cos x$.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par f_a .
2. Déterminer selon a le nombre de solutions de $f_a(x) = 0$ dans $[0; 2\pi[$.
3. Pour quelles valeurs de a , $f_a(x) \geq 0$ pour tout réel x ?
4. Pour quelles valeurs de a , $f_a(x) > 0$ pour tout réel x ?

Exercice 24 – Équation avec déphasage*Très difficile*

1. Transformer $\sin x$ sous la forme d'un cosinus d'un angle associé.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin x.$$

- Donner les solutions dans $[0; 2\pi[$.
- Vérifier une solution directement dans l'équation initiale.

Exercice 25 – Deux méthodes pour étudier $\sqrt{3} \sin x + \cos x$

Très difficile

Soit $F(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ sur $[0; 2\pi]$.

- Montrer que $F(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
- En déduire immédiatement les extrema de F .
- Calculer $F'(x)$ et retrouver les abscisses des extrema par la dérivation.
- Résoudre $F(x) = 0$ dans $[0; 2\pi[$.

Exercice 26 – Modélisation : grande roue

Très difficile

La hauteur, en mètres, d'une cabine de grande roue est modélisée pour $t \in [0; 12]$ par

$$h(t) = 12 + 8 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right),$$

où t est exprimé en minutes.

- Déterminer la période du mouvement et interpréter.
- Déterminer les hauteurs minimale et maximale.
- Résoudre $h(t) = 16$ puis $h(t) \geq 16$ sur $[0; 12]$.
- À l'aide de $h'(t)$, préciser les intervalles où la cabine monte et où elle descend.

Exercice 27 – Modélisation saisonnière : température

Très difficile

Une température moyenne est modélisée, pour $t \in [0; 12]$, par

$$T(t) = 15 + 6 \cos\left(\frac{\pi(t-3)}{6}\right),$$

où t est le nombre de mois écoulés depuis le début de l'année.

- Déterminer la période du modèle.
- Déterminer le mois théorique du maximum et celui du minimum, ainsi que les températures correspondantes.
- Résoudre $T(t) = 18$ sur $[0; 12]$.
- Déterminer l'intervalle de temps où $T(t) \geq 18$.

Exercice 28 – Reconstruire une fonction sinusoïdale

Très difficile

On sait qu'une fonction est de la forme $f(x) = a + b \sin x$. Sur $\mathbb{R}$, son maximum vaut 5, son minimum vaut -1 , et $f(\pi/2) = 5$.

- Déterminer a et $|b|$.
- Utiliser $f(\pi/2) = 5$ pour déterminer le signe de b .
- Donner l'expression de $f(x)$.
- Résoudre $f(x) = 2$ dans $[0; 2\pi[$.

Exercice 29 – Équation paramétrée $\sin x + \cos x = m$

Très difficile

Pour $m \in \mathbb{R}$, on étudie dans $[0; 2\pi[$ l'équation

$$\sin x + \cos x = m.$$

- Montrer que $-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$.
- Déterminer selon m le nombre de solutions dans $[0; 2\pi[$.
- Résoudre exactement le cas $m = 1$.

4. Résoudre exactement le cas $m = \sqrt{2}$.

Exercice 30 – Synthèse : deux combinaisons A et B *Très difficile*

On pose

$$A(x) = \sin x + \cos x, \quad B(x) = \sin x - \cos x.$$

1. Montrer que $A(x)^2 + B(x)^2 = 2$ pour tout réel x .
2. En déduire que $|A(x)| \leq \sqrt{2}$ et $|B(x)| \leq \sqrt{2}$.
3. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ le système $A(x) = 1$ et déterminer alors les valeurs possibles de $B(x)$.
4. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ le système

$$A(x) = \sqrt{2}, \quad B(x) = 0.$$