

Fonction exponentielle

Exercices seuls – Première Spécialité Mathématiques

Exercice 1 – Définition et propriétés fondamentales

On rappelle que la fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

1. Donner e^0 .
2. Montrer que, pour tout réel x , $e^x e^{-x} = 1$.
3. En déduire $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ et justifier que $e^x \neq 0$.

Exercice 2 – Calcul algébrique exact

Simplifier et écrire sous la forme e^{ax+b} :

$$A = \frac{e^{3x-2} e^{5-4x}}{e^{1-2x}}.$$

Déterminer ensuite a et b .

Exercice 3 – Ordre, signe et croissance

1. Ranger dans l'ordre croissant e^{-3} , 1 , e^{-1} , e^2 .
2. Déterminer le signe de $(2x - 5)e^x$.
3. Résoudre $(2x - 5)e^x \geq 0$.

Exercice 4 – Équations par injectivité

1. Résoudre $e^{4x-3} = e^{x+6}$.
2. Résoudre $e^{2x+1} = 1$.
3. Expliquer pourquoi $e^{x-2} = -5$ n'a aucune solution réelle.

Exercice 5 – Inéquations exponentielles

1. Résoudre $e^{3x-2} \leq e^{x+4}$.
2. Résoudre $e^{-2x} > 1$.
3. Donner les réponses sous forme d'intervalles.

Exercice 6 – Substitution $X = e^x$

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$e^{2x} - (1 + e^2)e^x + e^2 = 0.$$

1. Poser $X = e^x$ et préciser la contrainte sur X .
2. Résoudre l'équation en X .
3. Revenir à x .

Exercice 7 – Factorisation et tableau de signes

On considère

$$F(x) = 3e^{2x} + e^x - 4.$$

1. Vérifier que $F(x) = (e^x - 1)(3e^x + 4)$.
2. Déterminer le signe de $F(x)$.
3. Résoudre $F(x) \leq 0$.

Exercice 8 – Dérivées exponentielles

Calculer les dérivées :

$$f(x) = e^{-3x}, \quad g(x) = e^{2x+1}, \quad h(x) = 4e^{0,5x} - 3.$$

Justifier le cas g en écrivant $e^{2x+1} = e e^{2x}$.

Exercice 9 – Produit : variations et extremums

Soit $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$.

1. Montrer que $f'(x) = (x^2 - 2)e^x$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Dresser les variations de f .
4. Donner les valeurs exactes des extremums locaux.

Exercice 10 – Quotient, croissance et tangente

On considère

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}.$$

1. Justifier que g est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $g'(x) = \frac{3e^x}{(2e^x + 1)^2}$.
3. En déduire le sens de variation de g .
4. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 0$.

Exercice 11 – Tangente et inégalité fondamentale

On pose $p(x) = e^x - x - 1$.

1. Calculer $p'(x)$.
2. Étudier les variations de p .
3. Montrer que $p(x) \geq 0$ pour tout réel x .
4. En déduire $e^x \geq x + 1$ et interpréter géométriquement.

Exercice 12 – Unicité d'une équation sans logarithme

Résoudre dans $\mathbb{R}$

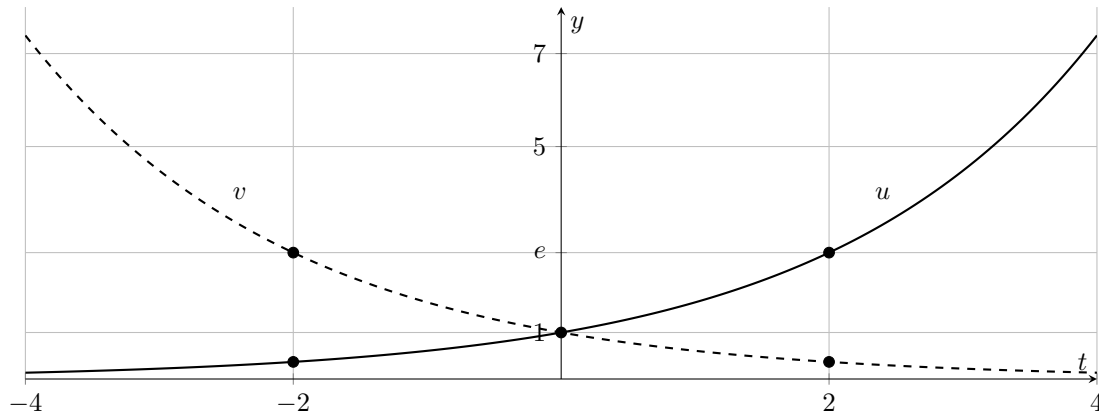
$$e^x = x + 1.$$

1. Utiliser l'inégalité $e^x \geq x + 1$.
2. Déterminer l'unique solution.

Exercice 13 – Lecture et construction de deux courbes exponentielles

On considère $u(t) = e^{0,5t}$ et $v(t) = e^{-0,5t}$.

1. Déterminer le sens de variation de u et de v .
2. Donner les coordonnées exactes des points pour $t = -2, 0, 2$.
3. Montrer que $v(t) = u(-t)$ et en déduire la symétrie des deux courbes.
4. Vérifier le graphique.



Exercice 14 – Lien avec une suite géométrique

On définit $u_n = 120e^{0,15n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. En déduire que (u_n) est géométrique et donner sa raison.
3. Calculer u_4 puis donner une valeur approchée au dixième.

Exercice 15 – Capital à croissance continue

Un capital est modélisé par

$$C(t) = 2500e^{0,04t}.$$

1. Calculer $C(5)$ à l'euro près.
2. Calculer exactement $\frac{C(t+1)}{C(t)}$ et interpréter.
3. Déterminer le premier entier t tel que $C(t) > 3200$.

Exercice 16 – Décroissance radioactive

Une quantité radioactive est modélisée par

$$N(t) = 600e^{-0,18t}, \quad t \geq 0.$$

1. Calculer $N(4)$ au dixième.
2. Montrer que N est strictement décroissante.
3. Déterminer, par tests entiers successifs, le premier entier t tel que $N(t) < 150$.

Exercice 17 – Déterminer les paramètres d'un modèle

On cherche un modèle $M(t) = Ae^{kt}$ tel que

$$M(0) = 80, \quad M(5) = 80e.$$

1. Déterminer A .
2. Déterminer k sans logarithme.
3. Étudier le sens de variation de M .

Exercice 18 – Refroidissement sans logarithme

La température d'un objet est modélisée par

$$T(t) = 18 + 72e^{-0,25t}, \quad t \geq 0.$$

1. Calculer $T(0)$.
2. Montrer que T est strictement décroissante.

3. Déterminer le premier entier t tel que $T(t) \leq 30$.

Exercice 19 – Méthode d'Euler : quatre pas

On approxime la solution de $y' = y$, $y(0) = 1$, sur $[0; 1]$ par Euler avec $h = 0,25$.

1. Montrer que $y_{n+1} = 1,25y_n$.
2. Calculer $y_0, \dots, y_4$.
3. Donner l'approximation de e obtenue.

Exercice 20 – Euler et la suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

1. Montrer qu'Euler appliqué à $y' = y$, $y(0) = 1$, sur $[0; 1]$ avec n pas donne

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

2. Calculer cette expression pour $n = 10$ puis $n = 100$, au millièmes.
3. Comparer avec $e \approx 2,71828$.

Exercice 21 – Méthode de Newton sur $e^x = 2$

On cherche une approximation de la solution de $e^x = 2$ avec $F(x) = e^x - 2$ et $x_0 = 1$.

1. Écrire la formule de Newton.
2. Calculer exactement x_1 .
3. À partir de $x_1 \approx 0,735759$, calculer x_2 au millièmes.

Exercice 22 – Comparer modèles discret et continu

Deux modèles partent de 1000 unités :

$$D_n = 1000(1,05)^n, \quad C(n) = 1000e^{0,05n}.$$

1. Montrer que $C(n) \geq D_n$ pour tout entier $n \geq 0$ à partir de $e^x \geq 1 + x$.
2. Calculer D_{10} et $C(10)$ à l'unité près.
3. Interpréter.

Exercice 23 – Optimisation d'une concentration

Sur $[0; 6]$, on modélise une concentration par

$$C(t) = te^{-t}.$$

1. Calculer $C'(t)$.
2. Étudier son signe.
3. Déterminer l'instant et la valeur exacte du maximum.

Exercice 24 – Famille $f_a(x) = (x - a)e^x$

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit

$$f_a(x) = (x - a)e^x.$$

1. Montrer que $f'_a(x) = (x - a + 1)e^x$.
2. Déterminer l'abscisse du minimum et sa valeur.
3. Déterminer le zéro de f_a .
4. Donner la tangente en $x = a$.

Exercice 25 – Croissance malgré un facteur quadratique

On considère

$$h(x) = (x^2 + 1)e^{2x}.$$

1. Calculer $h'(x)$.
2. Montrer que $h'(x) > 0$ pour tout réel x .
3. En déduire le sens de variation de h .
4. Comparer $h(-1)$, $h(0)$ et $h(1)$.

Exercice 26 – Fonction quotient bornée

Soit

$$F(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}.$$

1. Montrer que $F'(x) = \frac{5e^x}{(e^x + 1)^2}$.
2. Montrer que $-3 < F(x) < 2$.
3. Résoudre $F(x) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 27 – Croissance logistique : étude complète

La hauteur d'un plant est modélisée sur $[0; 250]$ par

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}.$$

1. Calculer $f(0)$.
 2. Montrer que
- $$f'(t) = \frac{1,52e^{-0,04t}}{(1 + 19e^{-0,04t})^2}.$$
3. En déduire le sens de variation.
 4. Déterminer le premier entier t tel que $f(t) > 1,5$.

Exercice 28 – Retrouver un modèle à partir de deux points

Une courbe $y = Ae^{kt}$ passe par

$$P(0; 3) \quad \text{et} \quad Q(4; 3e^2).$$

1. Déterminer A .
2. Déterminer k sans logarithme.
3. Calculer l'ordonnée pour $t = 2$.
4. Donner le sens de variation.

Exercice 29 – Carré exponentiel et tangente horizontale

On considère

$$\varphi(x) = e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2.$$

1. Montrer que $\varphi(x) = (e^x - e)^2$.
2. En déduire son signe et résoudre $\varphi(x) = 0$.
3. Calculer $\varphi'(1)$ et interpréter.

Exercice 30 – Approfondissement : caractérisation de l'exponentielle

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1.$$

On pose $g(x) = f(x)e^{-x}$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Montrer que g est constante.
3. Déterminer cette constante puis conclure.