

Dérivation – 1ère Spécialité Mathématiques

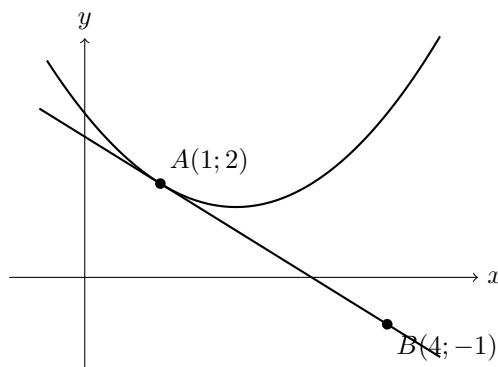
Exercice 1 – Taux de variation et dérivée de la fonction carré

Soit $f(x) = x^2$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $f(a)$ et $f(a+h)$.
2. Pour $h \neq 0$, simplifier $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
3. Quelle valeur ce taux approche-t-il lorsque h devient très proche de 0 ? En déduire $f'(a)$.
4. **a)** Calculer $f'(2)$, puis déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 2$.
b) Pour $g(x) = x^3$ et $p(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, déterminer $g'(a)$ et $p'(a)$, puis les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 1.
c) Pour $r(x) = x^4$ et $s(x) = \frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, déterminer les dérivées puis les tangentes aux deux courbes en $x = 1$.
d) Travailler aussi les trois fonctions $u(x) = x^2 + 2x$, $v(x) = 3x^2 - x$ et $w(x) = x^2 - 4x + 5$. Calculer, par le taux de variation ou par dérivation, $u'(1)$, $v'(1)$ et $w'(1)$.

Exercice 2 – Lecture graphique d'un nombre dérivé

La courbe est celle de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{2}$. La tangente en $A(1; 2)$ passe aussi par $B(4; -1)$.



1. Vérifier que le point $A(1; 2)$ appartient bien à la courbe de f .
2. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB) .
3. En déduire $f'(1)$.
4. **a)** Déterminer l'équation réduite de la tangente en A et vérifier qu'elle passe par B .
b) Pour $g(x) = x^2 - 2x + 2$ et $h(x) = -x^2 + 4x - 1$, calculer $g'(1)$ et $h'(1)$, puis donner les tangentes correspondantes en $x = 1$.
c) Pour $r(x) = x^2 + x - 1$ et $s(x) = -2x^2 + 3x + 2$, calculer la pente et l'équation de la tangente en $x = 1$.
d) Pour $u(x) = x^2 - 4x + 5$, $v(x) = -x^2 + 2x + 3$ et $w(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$, déterminer les tangentes respectivement en $x = 1$, $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 3 – Dérivées usuelles et puissances entières

Sur $]0; +\infty[$, on définit $f(x) = 4x^5 - \frac{3}{x^2} + 2\sqrt{x} - 7$.

1. Préciser pourquoi la fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$.
2. Donner séparément les dérivées de $4x^5$, $-3x^{-2}$, $2\sqrt{x}$ et -7 .
3. En déduire une expression simplifiée de $f'(x)$.

4. a) Calculer exactement $f'(1)$.
- b) Sur $]0; +\infty[$, dériver aussi $g(x) = 3x^4 + \frac{5}{x} - \sqrt{x}$ et $h(x) = x^6 - \frac{2}{x^3} + 4\sqrt{x}$, puis calculer $g'(1)$ et $h'(1)$.
- c) Sur $]0; +\infty[$, dériver encore $r(x) = 5x^3 - \frac{4}{x^2} + 3\sqrt{x}$ et $s(x) = 2x^5 + \frac{7}{x} - 2\sqrt{x}$, puis calculer $r'(1)$ et $s'(1)$.
- d) Dériver encore $u(x) = 4x^5 - 3x^2 + 2$, $v(x) = \frac{2}{x^3} + \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$, et $w(x) = (x^2 + 1)(x - 3)$.

Exercice 4 – Équation d'une tangente : formule et application

Soit f dérivable en a .

- Rappeler les coordonnées du point de tangence et le coefficient directeur de la tangente.
- Justifier la formule $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
- Pour $f(x) = x^2 - 4x + 5$, calculer $f(3)$ et $f'(3)$.
- a) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 3.
- b) Déterminer également la tangente à $g(x) = x^3 - 3x + 1$ en $x = -1$, puis celle à $h(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$.
- c) Déterminer aussi la tangente à $r(x) = x^2 + 2x - 1$ en $x = 0$, puis à $s(x) = x^3 + x$ en $x = 1$.
- d) Déterminer aussi les tangentes à $u(x) = x^3 - 2x$ en 1, à $v(x) = \frac{1}{x}$ en 2, et à $w(x) = \sqrt{x}$ en 4.

Exercice 5 – Approximation linéaire d'une racine carrée

On approche $\sqrt{4,04}$ à l'aide de la tangente à $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de 4.

- Calculer $f(4)$ et $f'(4)$.
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en $x = 4$.
- En déduire l'approximation linéaire de $\sqrt{4,04}$.
- a) Montrer que l'erreur de cette approximation vaut $\frac{0,0001}{2,01 + \sqrt{4,04}}$, puis donner son ordre de grandeur.
- b) Utiliser aussi les tangentes pour estimer $\frac{1}{2,02}$ avec $g(x) = \frac{1}{x}$ au voisinage de 2, puis $2,01^3$ avec $h(x) = x^3$ au voisinage de 2.
- c) À l'aide d'une approximation linéaire, estimer aussi $1,01^4$ avec $r(x) = x^4$ au voisinage de 1, puis $\sqrt{9,09}$ au voisinage de 9.
- d) Utiliser l'approximation linéaire pour estimer $\sqrt{16,16}$, $\frac{1}{0,98}$ et $2,01^3$.

Exercice 6 – Formule du produit : démonstration guidée et application

Soient u et v dérivables en a , et $p = uv$.

- En ajoutant puis en retranchant $u(a+h)v(a)$, décomposer $p(a+h) - p(a)$.
- Diviser par $h \neq 0$ et faire apparaître deux taux de variation.
- En déduire la formule $(uv)' = u'v + uv'$, puis calculer la dérivée de $f(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$.
- a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
- b) Dériver également $g(x) = (3x - 1)(x^2 + 2)$ et $h(x) = x(x + 4)$, puis calculer leurs pentes en $x = 1$.
- c) Dériver également $r(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$ et $s(x) = (2x + 1)(x^2 - x + 3)$, puis calculer respectivement $r'(1)$ et $s'(0)$.
- d) Dériver et évaluer : $u(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$ en 1, $v(x) = x^2\sqrt{x}$ en 4, et $w(x) = (3x + 1)\frac{1}{x}$ en 2.

Exercice 7 – Dérivée de la fonction inverse par le taux de variation

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a \neq 0$. On considère ensuite $g(x) = 2x + \frac{3}{x}$.

1. Pour $h \neq 0$ et $a + h \neq 0$, simplifier $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
2. En déduire $f'(a)$.
3. Déterminer $g'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1.
 b) Étudier aussi $p(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et $q(x) = \frac{3}{x} - 2x$ sur $\mathbb{R}^*$: calculer leurs dérivées et les tangentes respectivement en $x = 2$ et $x = 1$.
 c) Déterminer les tangentes à $r(x) = \frac{4}{x} + x^2$ en $x = 1$ et à $s(x) = \frac{2}{x} + 3x$ en $x = 2$.
 d) Calculer les dérivées puis les valeurs demandées pour $u(x) = \frac{5}{x} + 2x$ en 1, $v(x) = \frac{x+1}{x}$ en 2, et $w(x) = \frac{1}{2x-1}$ en 1.

Exercice 8 – La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0

On considère $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

1. Pour $h > 0$, calculer $\frac{f(h) - f(0)}{h}$.
2. Décrire le comportement de ce quotient lorsque h devient positif et très proche de 0.
3. Conclure sur la dérivabilité de f en 0.
4. a) Pour $x > 0$, rappeler $f'(x)$ et expliquer la cohérence avec le résultat précédent.
 b) Pour $x > 0$, dériver $g(x) = 2\sqrt{x} + x$ et $h(x) = (x+1)\sqrt{x}$, puis décrire le comportement de $g'(x)$ et $h'(x)$ lorsque x se rapproche de 0 par valeurs positives.
 c) Comparer près de 0^+ les dérivées de $r(x) = \sqrt{x} + x^2$ et $s(x) = x\sqrt{x}$.
 d) Comparer au voisinage de 0^+ les fonctions $u(x) = \sqrt{x} + x$, $v(x) = x\sqrt{x}$ et $w(x) = x^2\sqrt{x}$. Étudier la pente à droite en 0.

Exercice 9 – Valeur absolue : dérivabilité en 0

On considère $f(x) = |x|$.

1. Pour $h > 0$, calculer $\frac{f(h) - f(0)}{h}$.
2. Pour $h < 0$, calculer le même taux de variation.
3. En déduire si $f'(0)$ existe.
4. a) Déterminer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ et interpréter géométriquement le point $(0; 0)$.
 b) Étudier la dérivabilité en 0 de $g(x) = x|x|$, puis la dérivabilité en 2 de $h(x) = |x-2|$.
 c) Étudier aussi la dérivabilité de $r(x) = |2x-1|$ en $x = \frac{1}{2}$ et de $s(x) = (x-1)|x-1|$ en $x = 1$.
 d) Étudier la dérivabilité de $u(x) = |x-2|$ en 2, de $v(x) = (x-2)|x-2|$ en 2, et de $w(x) = |x^2-1|$ en 1.

Exercice 10 – Tangentes horizontales d'une fonction cubique

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Calculer et factoriser $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) = 0$.
3. Déterminer les coordonnées des points où la tangente est horizontale, puis les équations de ces tangentes.
4. a) Étudier le signe de f' et préciser la nature des deux extrema locaux.
 b) Rechercher aussi les tangentes horizontales de $g(x) = x^4 - 2x^2$ sur $\mathbb{R}$ et de $h(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$.
 c) Rechercher encore les tangentes horizontales de $r(x) = x^3 - 12x$ et de $s(x) = x^4 - 4x^2$. Donner les points correspondants.

d) Déterminer toutes les tangentes horizontales de $u(x) = x^3 - 3x$, $v(x) = x^4 - 2x^2$ et $w(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, puis donner les points de tangence.

Exercice 11 – Vitesse moyenne et vitesse instantanée

La position d'un mobile, en mètres, est donnée sur $[0; 4]$ par $s(t) = t^3 - 6t^2 + 15t$.

1. Calculer $s(1)$ et $s(3)$, puis la vitesse moyenne entre $t = 1$ et $t = 3$.
2. Déterminer la vitesse instantanée $v(t) = s'(t)$.
3. Calculer $v(2)$ et comparer avec la vitesse moyenne obtenue.
4. a) Écrire l'approximation locale de $s(2 + h)$ pour h petit.
 b) Deux autres mobiles ont pour positions $s_2(t) = 2t^2 + 3t$ et $s_3(t) = -t^3 + 6t^2$. Calculer leurs vitesses instantanées en $t = 2$ et comparer les trois mobiles.
 c) Deux autres positions sont $r(t) = 4t^2 - t$ et $q(t) = -2t^3 + 9t^2 + 1$. Calculer les vitesses instantanées en $t = 2$ et comparer avec les mobiles précédents.
 d) Trois mobiles ont pour positions $u(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$, $v(t) = 2t^2 + 5t$ et $w(t) = -t^3 + 6t^2$. Calculer leurs vitesses instantanées à $t = 2$.

Exercice 12 – Paramètre et pente imposée

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = x^3 + mx^2 + 2x$. On veut une tangente en $x = -1$ parallèle à $d : y = -x + 4$.

1. Calculer $f'_m(x)$.
2. Traduire la condition de parallélisme par une équation portant sur m .
3. Résoudre cette équation et déterminer m .
4. a) Pour cette valeur de m , déterminer l'équation de la tangente en $x = -1$.
 b) Déterminer aussi m pour que $g_m(x) = mx^2 + (m - 1)x + 2$ ait une tangente horizontale en $x = 1$, puis pour que $h_m(x) = x^2 + mx + 1$ ait une pente égale à 7 en $x = 2$.
 c) Étudier encore $r_m(x) = (m + 1)x^2 - 2mx + 1$: existe-t-il un m donnant une pente 3 en $x = 1$? Puis déterminer m pour que $s_m(x) = x^3 + mx$ ait une tangente horizontale en $x = 1$.
 d) Déterminer le paramètre dans trois familles : $u_m(x) = x^2 + mx$ avec pente 5 en 1 ; $v_m(x) = x^3 + mx^2$ avec tangente horizontale en -1 ; $w_m(x) = (m - 1)x^3 + 2x$ avec pente 1 en 0.

Exercice 13 – Retrouver un trinôme grâce à une tangente

On cherche $f(x) = ax^2 + bx + c$. On sait que $f(0) = 1$ et que la tangente en $x = 1$ est $y = 5x - 2$.

1. Traduire $f(0) = 1$ et la tangente donnée en trois équations portant sur a, b, c .
2. Résoudre le système et déterminer f .
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et les variations de f .
4. a) Déterminer le minimum exact de f .
 b) Refaire la reconstruction pour $g(x) = ux^2 + vx + w$ sachant que $g(0) = 2$ et que la tangente en 1 est $y = 4x - 1$. Déterminer ensuite le minimum de g .
 c) Reconstruire aussi $r(x) = Ax^2 + Bx + C$ sachant que $r(0) = 3$ et que la tangente en 2 est $y = 2x + 1$, puis $s(x) = Ux^2 + Vx + W$ sachant que $s(0) = -1$ et que la tangente en 1 est $y = -2x + 3$.
 d) Reconstruire trois fonctions de la forme $ax^2 + bx + c$: $u(0) = 1$ et tangente en 1 : $y = 4x - 2$; $v(0) = -2$ et tangente en 2 : $y = 6x - 8$; $w(0) = 3$ et tangente en -1 : $y = -4x + 1$.

Exercice 14 – Deux tangentes à une parabole passant par un point

On considère la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$ et le point $P(1; -3)$.

1. Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a .
2. Traduire le fait que cette tangente passe par P .

3. Résoudre l'équation obtenue et trouver les deux valeurs possibles de a .
4. a) Donner les deux tangentes issues de P et vérifier qu'elles passent bien par ce point.
 b) Pour $g(x) = x^2 - 2x$, déterminer les tangentes à la courbe qui passent par $Q(0; -4)$.
 c) Pour $r(x) = x^2 + 1$, déterminer les tangentes passant par $Q(0; -3)$. Puis, pour $s(x) = x^2 - 2x$, déterminer les tangentes passant par $R(0; -1)$.
 d) Pour $u(x) = x^2$, trouver les tangentes passant par $A(0; -4)$. Refaire pour $v(x) = x^2 + 2x$ passant par $B(0; -3)$, puis pour $w(x) = 2x^2$ passant par $C(0; -8)$.

Exercice 15 – Variations d'un quotient et domaine disjoint

On considère $g(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}$, définie pour $x \neq -2$.

1. Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = \frac{(x+2)^2 + 1}{(x+2)^2}$.
2. Étudier le signe de g' et les variations sur chacun des deux intervalles du domaine.
3. Calculer $g(-3)$ et $g(-1)$.
4. a) Peut-on affirmer que g est strictement croissante sur tout $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$? Expliquer précisément.
 b) Étudier également les variations de $p(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ et de $q(x) = \frac{10x}{x^2 + 9}$ sur $\mathbb{R}$.
 c) Étudier aussi les variations de $r(x) = \frac{x-1}{x+2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et de $s(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
 d) Étudier les variations de $u(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $v(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ et $w(x) = \frac{3x+4}{2x-5}$ sur chacun des intervalles de leur domaine.

Exercice 16 – Parité et variations d'une fonction de degré 4

Soit $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$.

1. Montrer que f est paire.
2. Factoriser $f'(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. a) Déterminer les extrema locaux et leurs valeurs exactes.
 b) Étudier la parité puis les points critiques de $g(x) = x^3 - 3x$ et de $h(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
 c) Étudier les variations de $r(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, puis de $s(x) = x^5 - 5x^3$, en exploitant leur parité lorsque c'est utile.
 d) Étudier les variations de $u(x) = x^4 - 8x^2$, $v(x) = x^3 - 3x$ et $w(x) = x^5 - 5x$.

Exercice 17 – Établir une inégalité grâce aux variations

Sur $]0; +\infty[$, on définit $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et la mettre sous forme d'un quotient dont le signe est simple.
2. Étudier le signe de f' et les variations de f .
3. Déterminer le minimum de f et le point où il est atteint.
4. a) En déduire une inégalité valable pour tout $x > 0$ et préciser le cas d'égalité.
 b) Par la même méthode, déterminer les minima de $g(x) = x^2 + \frac{4}{x}$ et $h(x) = 2x + \frac{8}{x}$ sur $]0; +\infty[$, puis écrire les deux inégalités associées.
 c) Établir de même, par étude de variations, $x + \frac{9}{x} \geq 6$ et $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ pour tout $x > 0$, en précisant les cas d'égalité.

d) Démontrer par étude de variations, pour $x > 0$, les trois inégalités : $x + \frac{16}{x} \geq 8$, $x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 4$, et $2x + \frac{18}{x} \geq 12$.

Exercice 18 – Position d’une courbe par rapport à sa tangente

Soit $f(x) = x^3$. On note T la tangente à la courbe au point d’abscisse 1.

- Déterminer l’équation de T .
- Factoriser $f(x) - T(x)$.
- Étudier le signe de cette différence.
- En déduire la position relative de la courbe et de T , en distinguant l’intersection en $x = -2$ et le contact en $x = 1$.
 - Comparer aussi $g(x) = x^2$ à sa tangente en 1, puis $h(x) = \frac{1}{x}$ à sa tangente en 1, en étudiant exactement la différence courbe-tangente.
 - Comparer aussi $r(x) = x^3$ à sa tangente en 1, puis $s(x) = \frac{1}{x}$ à sa tangente en 2, en factorisant exactement la différence courbe-tangente.
 - Comparer trois courbes à leur tangente : $u(x) = x^2$ en 1, $v(x) = 1/x$ en 1, et $w(x) = x^3$ en 0. Factoriser exactement chaque différence courbe-tangente.

Exercice 19 – Approximation linéaire et erreur exacte

On considère $f(x) = \frac{1}{x}$ au voisinage de 2.

- Calculer $f(2)$ et $f'(2)$, puis écrire l’approximation linéaire de $f(2+h)$.
- En prenant $h = -0,02$, estimer $\frac{1}{1,98}$.
- Calculer exactement $\frac{1}{1,98}$ sous forme irréductible.
- Déterminer l’erreur exacte de l’approximation puis une valeur décimale.
 - Donner aussi les approximations linéaires de $\sqrt{4,04}$ à partir de $g(x) = \sqrt{x}$ en 4, et de $2,01^3$ à partir de $h(x) = x^3$ en 2.
 - Approcher aussi $\frac{1}{1,01}$ avec $r(x) = 1/x$ au voisinage de 1, puis $1,02^3$ avec $s(x) = x^3$ au voisinage de 1. Calculer les erreurs exactes ou décimales.
 - Approcher linéairement $\sqrt{25,1}$, $1/1,02$ et $0,99^4$.

Exercice 20 – Optimisation d’un bénéfice

Une entreprise produit x centaines d’objets, $x \in [0; 8]$. Son bénéfice, en milliers d’euros, est $B(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 20$.

- Calculer et factoriser $B'(x)$.
- Étudier les variations de B sur $[0; 8]$.
- Calculer B aux bornes et aux points critiques.
- Déterminer le bénéfice maximal global et interpréter la valeur de x .
 - On suppose que la recette et le coût sont $R(x) = 12x^2 + 20$ et $C(x) = x^3 + 3x^2 + 15x$, en milliers d’euros. Vérifier que $B = R - C$, puis calculer R et C au niveau de production optimal.
 - Étudier deux autres bénéfices sur des intervalles adaptés : $B_2(x) = -3x^2 + 48x - 30$ et $B_3(x) = -2x^2 + 40x - 50$. Déterminer pour chacun le niveau de production optimal et le bénéfice maximal.
 - Optimiser trois bénéfices : $u(x) = -2x^2 + 40x - 100$, $v(x) = -x^2 + 18x + 20$ et $w(x) = -4x^2 + 64x - 60$. Donner le niveau optimal et le bénéfice maximal.

Exercice 21 – Rectangle maximal inscrit sous une parabole

On considère la parabole $y = 12 - x^2$. Un rectangle est inscrit sous la parabole, symétrique par rapport à l’axe des ordonnées, avec sa base sur l’axe des abscisses. Sa demi-largeur est $x \in [0; \sqrt{12}]$.

- Exprimer la largeur, la hauteur puis l'aire $A(x)$ du rectangle.
- Calculer et factoriser $A'(x)$.
- Étudier les variations de A sur son domaine.
- Déterminer exactement les dimensions et l'aire du rectangle maximal.
 - Refaire l'optimisation sous la parabole $g(x) = 18 - 2x^2$. Si la demi-largeur est $x \in [0; 3]$, déterminer l'aire maximale $B(x)$ et comparer avec $A_{max} = 32$.
 - Refaire l'optimisation pour un rectangle sous $r(x) = 20 - x^2$, puis sous $s(x) = 16 - 4x^2$. Donner dans chaque cas la demi-largeur optimale et l'aire maximale exacte.
 - Optimiser l'aire d'un rectangle symétrique sous chacune des paraboles $u(x) = 27 - x^2$, $v(x) = 12 - x^2$ et $w(x) = 24 - 2x^2$. Donner la demi-largeur optimale et l'aire maximale.

Exercice 22 – Boîte sans couvercle : optimisation complète

On découpe dans les quatre coins d'un carré de carton de côté 24 cm des carrés de côté x , puis on replie pour former une boîte sans couvercle.

- Exprimer les dimensions de la boîte, son volume $V(x)$ et le domaine utile de x .
- Écrire $V(x) = 4x(12 - x)^2$ puis factoriser $V'(x)$.
- Étudier les variations de V sur $]0; 12[$.
- Déterminer la valeur de x donnant le volume maximal et calculer ce volume.
 - Pour un second carton carré de côté 30 cm, définir $W(x) = x(30 - 2x)^2$. Déterminer la découpe optimale et comparer le volume maximal avec celui du carton de côté 24 cm.
 - Traiter encore deux cartons carrés : côté 18 cm avec $V_{18}(x) = x(18 - 2x)^2$, puis côté 36 cm avec $V_{36}(x) = x(36 - 2x)^2$. Déterminer les découpes et volumes maximaux.
 - On découpe des carrés de côté x aux coins de feuilles carrées de côtés 24, 30 et 18. Pour chaque feuille, déterminer la valeur de x maximisant le volume de la boîte sans couvercle et le volume maximal.

Exercice 23 – Aire constante sous une tangente à la fonction inverse

Sur $]0; +\infty[$, on considère $f(x) = \frac{1}{x}$. Pour $a > 0$, la tangente en $x = a$ coupe l'axe des ordonnées en M et l'axe des abscisses en N . On note O l'origine.

- Déterminer l'équation de la tangente en a .
- Déterminer les coordonnées exactes de M et N .
- Calculer l'aire du triangle rectangle OMN .
- Montrer que cette aire est indépendante de a et préciser également la valeur du produit $OM \times ON$.
 - Généraliser à la famille $f_k(x) = \frac{k}{x}$, avec $k > 0$. Calculer l'aire du triangle formé par la tangente en $a > 0$ et les axes, puis traiter explicitement $g(x) = \frac{4}{x}$.
 - Pour $r(x) = \frac{9}{x}$, déterminer l'aire du triangle formé par la tangente en $a > 0$ et les axes. Puis, pour $s(x) = x + \frac{4}{x}$, calculer cette aire pour la tangente au point d'abscisse 1.
 - Pour les trois fonctions $u(x) = 4/x$, $v(x) = 7/x$ et $w(x) = 10/x$ sur $]0; +\infty[$, montrer que le triangle délimité par une tangente quelconque et les axes a une aire indépendante du point de tangence, puis donner cette aire.

Exercice 24 – Une tangente commune à deux courbes

On considère $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

- Écrire la tangente T_f à la courbe de f au point d'abscisse a .
- Écrire la tangente T_g à la courbe de g au point d'abscisse $b \neq 0$.
- Égaliser pente et ordonnée à l'origine pour déterminer a et b .

4. a) Donner l'équation de la tangente commune et vérifier qu'elle est bien tangente aux deux courbes.
- b) Pour $h(x) = x^3 - 6x$, déterminer les points où la tangente est parallèle à la tangente commune $y = -4x - 4$, puis donner les équations de ces tangentes à h .
- c) Déterminer aussi la tangente commune aux deux paraboles $p(x) = x^2 + 2x$ et $q(x) = -x^2 + 2x$. Préciser les deux points de tangence.
- d) Identifier une tangente commune dans chacun des trois couples : $u_1(x) = x^2$ et $u_2(x) = (x-2)^2$; $v_1(x) = (x+1)^2$ et $v_2(x) = (x-3)^2$; $w_1(x) = 2(x-1)^2 + 4$ et $w_2(x) = 3(x+2)^2 + 4$. Donner les points de tangence.

Exercice 25 – Reconstruire un polynôme cubique à partir de deux tangentes

On cherche $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. La tangente en 0 est $T_0 : y = -x + 3$ et la tangente en 1 est $T_1 : y = -2x + 3$.

- Traduire T_0 en deux conditions sur $f(0)$ et $f'(0)$.
- Traduire T_1 en deux conditions sur $f(1)$ et $f'(1)$.
- Résoudre le système pour déterminer a, b, c, d .
- a) Vérifier directement les deux équations de tangentes.
- b) Reconstruire aussi un trinôme $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ dont la tangente en 0 est $y = 2x + 1$ et la tangente en 1 est $y = 4x$.
- c) Reconstruire encore deux cubiques. Pour $r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, les tangentes en 0 et 1 sont $y = 2x + 1$ et $y = -x + 5$. Pour s , elles sont $y = x - 2$ et $y = 4x - 5$. Déterminer r et s .
- d) Reconstruire trois cubiques à partir de leurs tangentes en 0 et 1. Pour $u : y = x + 1$ puis $y = 4x - 1$. Pour $v : y = -2x + 3$ puis $y = x + 1$. Pour $w : y = 3x - 1$ puis $y = -x + 4$.

Exercice 26 – Paramètre et stricte croissance sur tout $\mathbb{R}$

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère $f_m(x) = x^3 + (m-3)x$.

- Calculer $f'_m(x)$.
- Étudier le cas $m > 3$.
- Étudier séparément les cas $m = 3$ et $m < 3$.
- a) En déduire exactement l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- b) Déterminer de même les valeurs de m pour lesquelles $g_m(x) = x^3 + mx$ puis $h_m(x) = x^3 + (m+2)x$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.
- c) Déterminer aussi les valeurs de m pour lesquelles $r_m(x) = 2x^3 + (m-4)x$, puis $s_m(x) = 5x^3 + (2m+1)x$, sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.
- d) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles chacune des fonctions $u_m(x) = x^3 + (m-2)x$, $v_m(x) = 2x^3 + (m+1)x$ et $w_m(x) = 4x^3 + (2m-5)x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27 – Méthode de Newton pour approcher $\sqrt{2}$

On résout $F(x) = x^2 - 2 = 0$. Pour $x_n > 0$, Newton donne $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$. On prend $x_0 = \frac{3}{2}$.

- Calculer exactement x_1 .
- Calculer exactement x_2 .
- Donner x_2 à 10^{-6} près et comparer à $\sqrt{2} \approx 1,414214$.
- a) Expliquer géométriquement pourquoi la méthode de Newton utilise une tangente.
- b) Appliquer Newton à $G(x) = x^2 - 3$ avec $y_0 = 2$. Calculer exactement y_1 et y_2 , puis comparer y_2 à $\sqrt{3} \approx 1,732051$.
- c) Appliquer encore Newton à $r(x) = x^2 - 5$ avec $z_0 = 2$, puis à $s(x) = x^2 - 10$ avec $w_0 = 3$. Calculer exactement les deux premières itérations dans chaque cas.
- d) Effectuer deux itérations de Newton pour approcher $\sqrt{3}$ à partir de 2, $\sqrt{7}$ à partir de 3, et $\sqrt{11}$ à partir de 3.

Exercice 28 – Minimum exact d’une fonction rationnelle

Sur $]0; +\infty[$, on considère $f(x) = x^2 + \frac{4}{x}$. On pose $\alpha = \sqrt[3]{2}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que son signe est celui de $x^3 - 2$.
2. Étudier les variations de f et montrer que le minimum est atteint en α .
3. Calculer exactement $f(\alpha)$ sous la forme $k\alpha^2$.
4. **a)** En déduire une inégalité valable pour tout $x > 0$, avec son cas d’égalité.
b) Déterminer également les minima de $g(x) = x + \frac{4}{x}$ et $h(x) = 2x + \frac{8}{x}$ sur $]0; +\infty[$, puis comparer les trois inégalités obtenues.
c) Déterminer aussi les minima exacts de $r(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ et de $s(x) = 2x^2 + \frac{8}{x}$ sur $]0; +\infty[$, avec les inégalités associées.
d) Déterminer les minima exacts sur $]0; +\infty[$ de $u(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $v(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ et $w(x) = x^2 + \frac{54}{x}$, puis écrire les inégalités correspondantes.

Exercice 29 – Cylindre fermé de volume fixé : surface minimale

On fabrique un cylindre fermé de rayon $r > 0$ et de hauteur $h > 0$, de volume fixé $250\pi \text{ cm}^3$.

1. À partir de $\pi r^2 h = 250\pi$, exprimer h en fonction de r .
2. Montrer que la surface totale vaut $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r}$.
3. Calculer $S'(r)$ et étudier les variations de S sur $]0; +\infty[$.
4. **a)** Déterminer les dimensions minimisant la surface et la surface minimale exacte.
b) Pour un cylindre de même volume mais sans couvercle, la surface est $S_o(r) = \pi r^2 + \frac{500\pi}{r}$. Déterminer ses dimensions optimales et comparer sa surface minimale à celle du cylindre fermé.
c) Reprendre le problème avec un volume fixé 128π . Pour un cylindre fermé, déterminer r, h, S_{min} . Puis faire de même pour un cylindre sans couvercle.
d) Pour des cylindres fermés de volumes $54\pi, 128\pi$ et 250π , déterminer dans chaque cas le rayon et la hauteur minimisant la surface totale, puis la surface minimale.

Exercice 30 – Raccordement et dérivabilité d’une fonction définie par morceaux

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit $f_{a,b}(x) = x^2 + a$ si $x \leq 1$, et $f_{a,b}(x) = bx$ si $x > 1$.

1. Calculer $f(1)$ et, pour $h < 0$, simplifier $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$.
2. Pour $h > 0$, simplifier le même taux de variation.
3. Déterminer la condition nécessaire pour que le taux à droite s’approche d’un réel fini, puis identifier sa valeur.
4. **a)** Déterminer a et b pour que les deux côtés donnent le même nombre dérivé, puis calculer $f'(1)$.
b) Étudier aussi le raccordement de $g_{a,b}(x) = x^2 + 1$ si $x \leq 1$, et $g_{a,b}(x) = ax + b$ si $x > 1$. Déterminer a, b pour que g soit continue et dérivable en 1.
c) Étudier aussi deux raccordements. Pour $r_{a,b}(x) = ax + b$ si $x \leq 0$ et $x^2 + 1$ si $x > 0$, déterminer a, b pour continuité et dérivabilité en 0. Puis montrer qu’aucun couple ne rend $s_{a,b}(x) = x^2 + ax$ si $x \leq 2$ et $bx + 1$ si $x > 2$ à la fois continue et dérivable en 2.
d) Étudier trois raccordements. 1) $u(x) = ax + b$ si $x \leq 0$, $x^2 + 2$ sinon. 2) $v(x) = x^2 + ax$ si $x \leq 1$, $bx + 1$ sinon. 3) $w(x) = ax^2 + b$ si $x \leq 2$, $3x - 1$ sinon. Déterminer les paramètres pour continuité et dérivabilité lorsque c’est possible.