

Exercice 1 – Tangente et variation locale – polynôme du second degré

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 5.$$

1. Calculer $f'(x)$.
 2. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$. Interpréter $f'(1)$ graphiquement.
 3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
 4. Étudier le signe de f' et donner les variations de f ainsi que son minimum.
- Pour $u(x) = -2x^3 - 5x^2 - 3x + 1$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = (3x - 2)(x^2 + 4x - 1)$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 2 – Polynôme du quatrième degré – trois points critiques

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^4 - 2x^2.$$

1. Calculer puis factoriser $g'(x)$.
 2. Résoudre $g'(x) = 0$ et étudier le signe de g' .
 3. Dresser les variations de g et déterminer ses extrema locaux.
 4. En déduire que, pour tout réel x , $x^4 - 2x^2 \geq -1$, puis retrouver cette inégalité par une identité remarquable.
- Pour $u(x) = -x^3 + 4x^2 - 8x + 3$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = (x^2 + 2x - 1)^4$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 3 – Tangente parallèle à une droite donnée

Soit $f(x) = x^2 + x - 2$. On cherche une tangente à sa courbe parallèle à la droite

$$d : y = 5x - 1.$$

1. Calculer $f'(x)$.
 2. Déterminer l'abscisse a du point de tangence.
 3. Calculer les coordonnées du point de tangence, puis déterminer l'équation de la tangente.
 4. Cette tangente coupe-t-elle la droite d ? Justifier.
- Pour $u(x) = (5x - 3)(2x^2 - 3x)$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = (x + 2)(3x^2 - 2x + 5)$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 4 – Produit de fonctions – variations et deux tangentes horizontales

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x(x - 2)^2.$$

1. Calculer $f'(x)$ en utilisant la dérivée d'un produit, puis factoriser le résultat.
 2. Résoudre $f'(x) = 0$ et étudier le signe de f' .
 3. Dresser les variations de f et déterminer les valeurs des deux extrema locaux.
 4. Donner les équations des deux tangentes horizontales et préciser les coordonnées des points de contact.
- Pour $u(x) = (2x + 5)(2x^2 - x + 1)$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

- Pour $v(x) = (2x + 1)^2(x^2 - 3)$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 5 – Approximation linéaire de la fonction inverse

On considère $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$, au voisinage de $a = 2$.

1. Calculer $f(2)$ et $f'(2)$.
 2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 2$.
 3. Utiliser cette tangente pour donner une approximation de $\frac{1}{2,04}$.
 4. Comparer avec la valeur exacte $\frac{25}{51}$ et donner l'erreur absolue à 10^{-6} près.
- Pour $u(x) = 2\sqrt{x} + 3x$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = 5\sqrt{x} - 2x$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 6 – Fonction rationnelle – variations, tangente et position relative

On considère

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f et calculer $f'(x)$.
 2. Étudier les variations de f sur chacun des intervalles de son domaine.
 3. Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0.
 4. Sur $] -1; +\infty[$, étudier la position relative de la courbe de f et de T .
- Pour $u(x) = (3x^2 - 2x + 1)^3$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = (2x^2 - 3x + 4)^3$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 7 – Valeur absolue – fonction par morceaux et non-dérivabilité

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = |x - 2| + \frac{x}{2}.$$

1. Écrire $u(x)$ sans valeur absolue sur $] -\infty; 2[$ puis sur $[2; +\infty[$.
 2. Calculer la dérivée de u sur chacun des deux intervalles ouverts.
 3. Étudier la dérivabilité de u en $x = 2$.
 4. Dresser les variations de u sur $\mathbb{R}$ et déterminer son minimum global.
- Pour $u(x) = (5x^2 - 4x + 3)^3$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = (4x - 1)^3(x^2 + 1)$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 8 – Optimisation sous contrainte linéaire

Deux réels positifs x et y vérifient

$$x + 2y = 12.$$

On souhaite maximiser le produit $A = xy$.

1. Exprimer y en fonction de x et préciser le domaine de x .
2. Écrire A comme une fonction de x et calculer $A'(x)$.

3. Étudier les variations de A et déterminer la valeur de x qui maximise le produit.
 4. Donner la valeur de y correspondante et le produit maximal.
- Pour $u(x) = -\frac{2}{x} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^5}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
 - Pour $v(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^4}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 9 – Vitesse instantanée et changement de sens

La position d'un mobile sur un axe est donnée, pour $t \in [0; 4]$, par

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,$$

où s est exprimée en mètres et t en secondes.

1. Déterminer l'expression de la vitesse instantanée $v(t)$.
 2. Déterminer les instants où le mobile est à l'arrêt.
 3. Étudier le signe de v et décrire le sens du mouvement sur $[0; 4]$.
 4. Calculer $s(0), s(1), s(3), s(4)$ et déterminer les positions minimale et maximale sur $[0; 4]$.
- Pour $u(x) = \frac{2}{3x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{3}{x^4}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
 - Pour $v(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^3}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 10 – Racine carrée – non-dérivabilité en 0 et approximation

On étudie la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

1. Pour $h > 0$, simplifier le taux d'accroissement $\frac{f(h) - f(0)}{h}$, puis expliquer pourquoi f n'est pas dérivable en 0.
 2. Pour $x > 0$, donner $f'(x)$.
 3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4.
 4. Utiliser cette tangente pour approcher $\sqrt{4,1}$, puis comparer avec 2,024846 à 10^{-6} près.
- Pour $u(x) = 3\sqrt{x} + \frac{5}{x}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
 - Pour $v(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 11 – Type épreuve anticipée – rationnelle, variations et tangente parallèle

On considère, sur $]0; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 8}{x}.$$

1. Réécrire $f(x)$ sous la forme $3x + 5 + \frac{8}{x}$, puis calculer $f'(x)$.
 2. Étudier le signe de f' et dresser les variations de f sur $]0; +\infty[$.
 3. Déterminer exactement le minimum de f .
 4. Existe-t-il une tangente à la courbe parallèle à la droite $y = 2x + 7$? Si oui, déterminer l'abscisse du point de tangence.
- Pour $u(x) = \frac{3x^2 - 5}{2x - 3}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

- Pour $v(x) = \frac{4x^2 + 1}{3x - 2}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 12 – Paramètre et nombre d'extrema

Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit

$$f_m(x) = x^3 - 3mx + 1.$$

1. Calculer $f'_m(x)$.
 2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 3. Pour $m > 0$, déterminer les abscisses et la nature des extrema locaux.
 4. Pour $m > 0$, calculer exactement les valeurs de ces deux extrema.
- Pour $u(x) = \frac{2x^3 + 5x}{2x + 3}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
 - Pour $v(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x + 2}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 13 – Boîte sans couvercle – optimisation exacte

On découpe dans chaque coin d'un carré de carton de côté 18 cm un carré de côté x , puis on replie pour former une boîte sans couvercle.

1. Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte et préciser le domaine de x .
 2. Développer V puis factoriser $V'(x)$.
 3. Étudier les variations de V sur son domaine.
 4. Déterminer la valeur de x qui maximise le volume et calculer ce volume maximal.
- Pour $u(x) = -\frac{2}{(-3x^2 + 2x - 3)^2}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
 - Pour $v(x) = \frac{5}{(x^2 + 2x + 5)^2}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 14 – Bénéfice, seuils de rentabilité et optimum

Une entreprise produit q unités, avec $q \in [0; 60]$. Le coût et la recette, en centaines d'euros, sont

$$C(q) = q^2 + 20q + 100, \quad R(q) = 80q.$$

1. Exprimer le bénéfice $B(q) = R(q) - C(q)$.
 2. Étudier les variations de B et déterminer la production qui maximise le bénéfice.
 3. Calculer le bénéfice maximal.
 4. Résoudre exactement $B(q) > 0$ et interpréter l'intervalle obtenu.
- Pour $u(x) = \frac{4}{(3x^2 - 3)^3}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
 - Pour $v(x) = \frac{2}{(4x^2 - 1)^3}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 15 – Inégalité par étude de fonction – rectangle d'aire fixée

Pour $x > 0$, on considère

$$f(x) = x + \frac{9}{x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe.

2. Dresser les variations de f et calculer son minimum.

3. En déduire l'inégalité $x + \frac{9}{x} \geq 6$ pour tout $x > 0$, et préciser le cas d'égalité.

4. Un rectangle a une aire de 9 cm^2 . Montrer que son périmètre est au moins 12 cm et déterminer quand ce minimum est atteint.

— Pour $u(x) = \frac{5}{3x^2 + 7x}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

— Pour $v(x) = \frac{4}{x^2 - 3x}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 16 – Racine carrée et quotient – maximum exact et inégalité

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

1. Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et montrer que

$$f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser les variations de f sur $[0; +\infty[$.

3. Déterminer la valeur maximale de f et l'abscisse où elle est atteinte.

4. En déduire, pour tout $x \geq 0$, l'inégalité $2\sqrt{x} \leq x+1$, en précisant le cas d'égalité.

— Pour $u(x) = \frac{3}{4x - 5x^2}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

— Pour $v(x) = \frac{(3x+1)^2}{x-1}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 17 – Distance minimale à une parabole

Dans un repère orthonormé, on considère la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$ et le point $A(0; 3)$. Un point M de $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $M(x; x^2)$.

1. Exprimer le carré de la distance AM sous la forme d'une fonction $D(x)$.

2. Calculer et factoriser $D'(x)$.

3. Étudier les variations de D et déterminer les abscisses des points de $\mathcal{P}$ les plus proches de A .

4. Calculer exactement la distance minimale.

— Pour $u(x) = \frac{(2x-1)^2}{x-2}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

— Pour $v(x) = \frac{x-4}{(x^2+1)^2}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 18 – Deux tangentes passant par un point extérieur

On considère la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$ et le point $P(1; -3)$.

1. Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a .

2. Imposer le passage de cette tangente par P et déterminer les valeurs possibles de a .

3. Déterminer les équations des deux tangentes obtenues.

4. Vérifier directement que chacune passe bien par P et est tangente à la parabole au point annoncé.

— Pour $u(x) = \frac{2x+5}{(2x^2+3)^3}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

- Pour $v(x) = \frac{2x+1}{(x^2+3)^2}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 19 – Retrouver un polynôme à partir d'informations de tangence

On considère une fonction

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

où a, b, c sont réels. On sait que la tangente en $x = 0$ est la droite $y = 3x + 1$, et que la tangente en $x = 1$ est horizontale.

- Traduire l'information sur la tangente en $x = 0$ en deux équations et déterminer b et c .
 - Utiliser la tangente horizontale en $x = 1$ pour déterminer a .
 - Donner l'expression de f , puis factoriser $f'(x)$.
 - Étudier les variations de f et expliquer pourquoi la tangente horizontale en 1 ne correspond pas à un extremum.
- Pour $u(x) = (4x-2)^3(3x^2-2)$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = (x-1)(x^2+2x)^2$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 20 – Méthode de Newton – approximation de $\sqrt[3]{2}$

On cherche à résoudre $x^3 - 2 = 0$ par la méthode de Newton, avec $x_0 = \frac{3}{2}$. On pose $F(x) = x^3 - 2$.

- Calculer $F'(x)$ et montrer que la méthode de Newton conduit à

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{2}{x_n^2} \right).$$

- Calculer exactement x_1 .
 - Calculer x_2 sous forme exacte puis donner une valeur décimale à 10^{-6} près.
 - Calculer x_3 à 10^{-6} près et en déduire une approximation de $\sqrt[3]{2}$.
- Pour $u(x) = (3x+1)(2x^2+3x)^2$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = (2x+3)(x^2-x)^2$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 21 – Paramètre – bifurcation des variations

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère

$$f_m(x) = x^3 - 3x^2 + mx.$$

- Calculer $f'_m(x)$ et son discriminant en tant que trinôme en x .
 - Étudier les variations de f_m selon que $m > 3$, $m = 3$ ou $m < 3$.
 - Dans le cas $m < 3$, donner exactement les deux abscisses critiques et préciser la nature de chacun des extrema.
 - Traiter complètement le cas $m = 0$: points critiques, variations et valeurs des extrema.
- Pour $u(x) = x\sqrt{2x+3}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = x\sqrt{x+4}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 22 – Minimum exact avec racine cubique

On considère, pour $x > 0$,

$$f(x) = x^2 + \frac{4}{x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous la forme d'un quotient dont le numérateur contient $x^3 - 2$.
 2. Étudier les variations de f et déterminer exactement l'abscisse du minimum.
 3. Calculer exactement la valeur minimale de f .
 4. En déduire une inégalité valable pour tout $x > 0$, avec son cas d'égalité.
- Pour $u(x) = (2x + 3)\sqrt{3x - 2}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = (x - 1)\sqrt{2x + 5}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 23 – Boîte rectangulaire 20

textbackslash

textbackslash

times

30 – optimum irrationnel

On découpe des carrés de côté x aux quatre coins d'un rectangle de carton de dimensions 20 cm sur 30 cm, puis on replie pour obtenir une boîte sans couvercle.

1. Exprimer le volume $V(x)$ et préciser le domaine de x .
 2. Développer V , calculer $V'(x)$ et résoudre exactement $V'(x) = 0$.
 3. Déterminer laquelle des deux racines correspond à l'optimum physique, puis justifier qu'il s'agit d'un maximum.
 4. Calculer exactement le volume maximal puis donner une valeur approchée au cm^3 près.
- Pour $u(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{2-x}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 24 – Optimisation avec paramètre – effet d'une taxe

Pour $t \in [0; 30]$, le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, est modélisé pour $q \in [0; 50]$ par

$$B_t(q) = -q^2 + (50 - t)q - 100.$$

1. Calculer $B'_t(q)$ et déterminer, en fonction de t , la production q_t qui maximise le bénéfice.
 2. Vérifier que q_t appartient bien à $[0; 50]$ pour tout $t \in [0; 30]$.
 3. Calculer le bénéfice maximal $M(t)$ en fonction de t .
 4. Déterminer pour quelles valeurs de t le bénéfice maximal est strictement positif et interpréter l'effet de t sur la production optimale.
- Pour $u(x) = \frac{2x^2 - 3x}{\sqrt{3x - 1}}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{2x + 1}}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 25 – Rectangle inscrit sous une parabole

Dans le demi-plan supérieur, un rectangle est inscrit sous la parabole

$$y = 12 - x^2,$$

symétriquement par rapport à l'axe des ordonnées. Les sommets supérieurs ont pour abscisses $-x$ et x , avec $x \geq 0$.

1. Exprimer la largeur, la hauteur et l'aire $A(x)$ du rectangle. Préciser le domaine de x .
2. Calculer et factoriser $A'(x)$.

3. Étudier les variations de A et déterminer l'abscisse optimale.
4. Donner les dimensions du rectangle d'aire maximale et la valeur de cette aire.
- Pour $u(x) = (3x + 3)^3 \sqrt{2x - 2}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = (x + 1)^3 \sqrt{3x + 2}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 26 – Famille de tangentes à l'hyperbole – aire constante

On considère $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Pour $a > 0$, on note T_a la tangente à la courbe au point d'abscisse a .

1. Déterminer l'équation réduite de T_a .
2. Déterminer les coordonnées des intersections de T_a avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
3. Calculer l'aire du triangle formé par T_a et les deux axes.
4. Montrer que cette aire ne dépend pas de a et interpréter ce résultat géométriquement.
- Pour $u(x) = (2x - 1)^2 \sqrt{x + 3}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = (x^2 - 1) \sqrt{x + 2}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 27 – Approximation linéaire avec contrôle exact de l'erreur

On considère, pour $x > -1$,

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

1. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe en $x = 0$.
2. Montrer exactement que

$$f(x) - T(x) = \frac{x^2}{1+x}.$$

3. Pour $0 \leq x \leq 0,05$, montrer que l'erreur de l'approximation $f(x) \approx 1 - x$ est positive et majorée par x^2 .
4. Utiliser l'approximation linéaire pour estimer $\frac{1}{1,02}$, puis calculer l'erreur exacte.
- Pour $u(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{x+2}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x+1}}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 28 – Parabole et famille de droites – condition de tangence

On considère la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$ et, pour $m \in \mathbb{R}$, la droite

$$d_m : y = mx - 1.$$

1. Écrire l'équation dont les solutions sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{P}$ et d_m .
2. Selon la valeur de m , déterminer le nombre de points d'intersection.
3. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles d_m est tangente à $\mathcal{P}$, puis donner les points de tangence.
4. Retrouver ces valeurs de m en utilisant directement la dérivée de $f(x) = x^2$.
- Pour $u(x) = \frac{x^2 - 4}{2x + 1}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 1}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 29 – Inégalité de la tangente à $\sqrt{x}$ sans convexité

Pour $x > 0$, on pose

$$h(x) = \frac{x+1}{2} - \sqrt{x}.$$

1. Calculer $h'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser les variations de h et déterminer son minimum.
3. En déduire l'inégalité

$$\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$$

pour tout $x > 0$, en précisant le cas d'égalité.

4. En appliquant cette inégalité à $x = \frac{a}{b}$ avec $a, b > 0$, démontrer $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

- Pour $u(x) = \frac{\sqrt{4x-1}}{x+3}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
- Pour $v(x) = (x-2)\sqrt{x+5}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.

Exercice 30 – Synthèse rationnelle – minimum, inégalité et tangente imposée

On considère, sur $] -1; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 7}{x+1}.$$

1. Réécrire $f(x)$ sous la forme $x+3 + \frac{4}{x+1}$, puis calculer $f'(x)$.
 2. Étudier les variations de f et déterminer son minimum global sur $] -1; +\infty[$.
 3. En déduire l'ensemble des solutions de $f(x) \geq 6$ sur le domaine.
 4. Déterminer l'abscisse du point où la tangente à la courbe est parallèle à la droite $y = \frac{1}{2}x - 3$.
- Pour $u(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x+2}}$, préciser l'ensemble sur lequel u est dérivable, puis calculer $u'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.
 - Pour $v(x) = (x+1)^2\sqrt{2x+3}$, préciser l'ensemble sur lequel v est dérivable, puis calculer $v'(x)$ et réduire au même dénominateur si nécessaire.